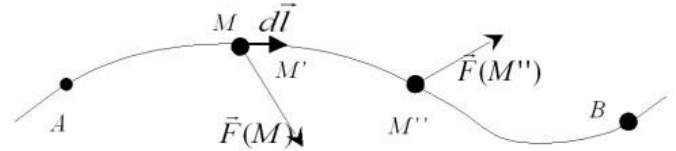


I. Puissance et travail d'une force appliquée à un point matériel.1. Travail élémentaire d'une force

Soit un référentiel R et M un point matériel décrivant une trajectoire C dans R entre t_1 et t_2 , et soumis à la force $\vec{F}$.

Cette trajectoire est décomposée en une succession de déplacements élémentaires : $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{l}$, $d\vec{l}$ est à tout instant tangent à C et colinéaire de même sens que le vecteur vitesse $\vec{v}$

où O est un point fixe du référentiel, par ex l'origine du repère



Définition : Le travail élémentaire de $\vec{F}$ fourni à M , sur le trajet $d\overrightarrow{OM}$ (pendant la durée dt) est :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (\text{unité SI : le Joule J})$$

$$\text{on a aussi } \delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\text{on peut aussi écrire } \delta W(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha \quad \text{avec } \alpha = (\widehat{\vec{F}, \vec{v}})$$

$= (\|\vec{F}\| \cdot \cos \alpha) \cdot \|\vec{v}\|$, $\|\vec{F}\| \cdot \cos \alpha$ représentant la projection orthogonale de $\vec{F}$ sur la direction du déplacement élémentaire.

- Si $\delta W(\vec{F}) > 0$, (càd $0 \leq \alpha < \pi/2$) le travail est moteur,

si $\delta W(\vec{F}) < 0$ (càd $\pi/2 < \alpha \leq \pi$), le travail est résistant,

si $\delta W(\vec{F}) = 0$ (càd $\alpha = \pi/2$), la force ne travaille pas.

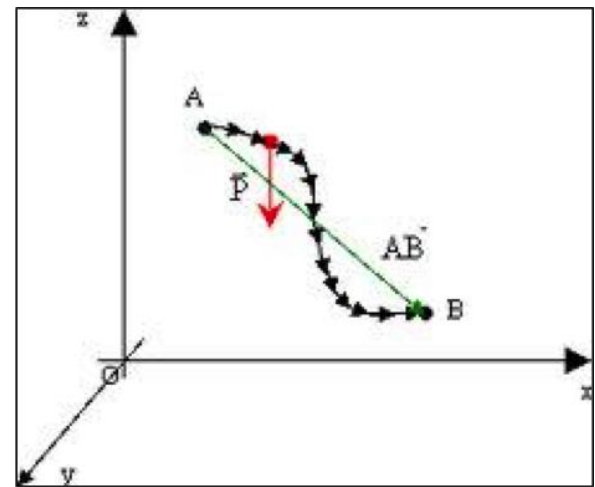
Rq 1 : Dimension d'un travail $[\delta W] = M.L.T^{-2}.L = M.L^2.T^{-2}$ comme une énergie.

Rq 2 : $\delta W(\vec{F})$ dépend du référentiel R .

Rq 3 : Expressions dans la base de projection : -cartésienne: $\delta W(\vec{F}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

-cylindrique : $\delta W(\vec{F}) = F_r dr + F_\theta r d\theta + F_z dz$

-sphérique : $\delta W(\vec{F}) = F_r dr + F_\theta r d\theta + F_\phi r \sin\theta d\phi$

2. Travail d'une force pour un déplacement fini

Soit un point M se déplaçant de A à B selon un trajet à priori quelconque, le travail de la force $\vec{F}$ dans le référentiel R sur le parcours de A à B est la somme des travaux élémentaires : (cf fig ci-dessus)

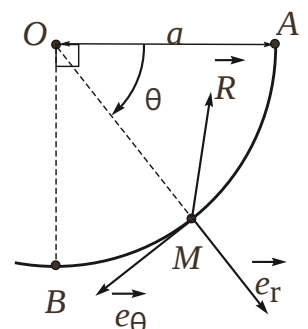
$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Rq : Là encore, à priori, $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ dépend du réf R , de plus il dépend du chemin C suivi par M pour aller de A à B .

-Ex1 : Cas d'une force de norme constante sur $A \rightarrow B$

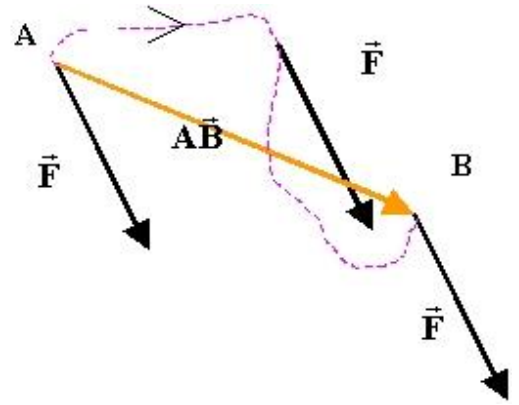
Dans R , un point matériel glisse sur une gouttière circulaire qui exerce sur lui des frottements de norme constante ($= \|\vec{R}_T\| = \text{Cte} = f$).

Exprimer en fonction de f et de a , rayon de la gouttière, le travail de la réaction du support sur le point M lorsqu'il se déplace de A ($\theta = 0$) à B ($\theta = \pi/2$)...



-Ex2 : Cas d'une force constante sur $A \rightarrow B$ (le poids...)

Alors $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ Dans ce cas seulement , $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B (force conservative)



3. Puissance d'une force

Déf : On appelle **puissance** (instantanée) d'une force $\vec{F}$ fournie à un point M, à l'instant t, animé de la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel R le **rapport du travail élémentaire reçu pendant dt autour de l'instant t par la durée correspondante** :

$$P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{unité : le Watt :W})$$

- $[P] = ML^2T^{-3}$

- P dépend de R

- puissance moyenne d'une force $\vec{F}$ exercée sur un point M sur un trajet fini de A à B (de durée $\Delta t = t_B - t_A$)

$$P_{AB}(\vec{F}) = \langle P(\vec{F}) \rangle = \frac{W_{A \rightarrow B}(\vec{F})}{\Delta t}$$

C'est aussi $\frac{1}{\Delta t} \cdot \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_A^B P(\vec{F}) dt$, $P(\vec{F})$ étant une fonction du temps.

Ainsi, $P_{AB}(\vec{F}) = \langle P(\vec{F}) \rangle$ est **la moyenne temporelle** de la puissance instantanée sur la durée Δt .

II. Energie cinétique d'un point matériel.

1. Définition

On appelle énergie cinétique d'un point matériel de masse m animé de la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel R la grandeur,

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad ; \quad \text{on a aussi } E_c = \frac{p^2}{2m} \quad \text{avec } p^2 = \|\vec{p}\|^2, \vec{p} \text{ étant la quantité de mouvement du point.}$$

v est le module de $\vec{v}$; on a $v^2 = \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

Rq : Là encore, tout comme la vitesse, E_c dépend de R.

2. Théorème de la puissance cinétique

On dérive l'expression de E_c par rapport au temps :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \cdot \vec{a} \quad ; \quad \text{or, dans un réf R galiléen, on a } m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

d'après la 2^{ème} loi de Newton

Dc $\frac{dE_c}{dt} = \vec{v} \cdot \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v} = \sum_i P(\vec{F}_i)$, on peut noter $P(\vec{F}_i) = P_i$, la puissance instantanée qu'exerce la force $\vec{F}_i$ sur m ; on peut noter la somme de ces puissances $\sum_i P(\vec{F}_i) = P(\sum \vec{F}) =$ la puissance de la résultante des forces.

$$\text{Dc au final} \quad \frac{dE_c}{dt} = P(\sum \vec{F})$$

Dans un référentiel galiléen R, la puissance de la résultante des forces qui s'appliquent sur un point matériel M est égale à la dérivée temporelle de l'énergie cinétique de ce point M.

(formulation « instantanée » de l'énoncé du ThEc)

3. Théorème de l'énergie cinétique (ThEc).

Entre t et $t + dt$, E_c varie de la variation élémentaire : $dE_c = P(\sum \vec{F}) \cdot dt = \frac{\delta W(\sum \vec{F})}{dt} dt = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$

dc, sur un déplacement élémentaire, la variation de E_c , est égale à la somme des travaux élémentaires des forces qui s'exercent sur M.

Pour une durée finie $\Delta t = t_2 - t_1$, c'est-à-dire entre un instant t_1 où M se trouve en un point M_1 et un instant t_2 où M se trouve en un point M_2 : la variation de ΔE_c vaut

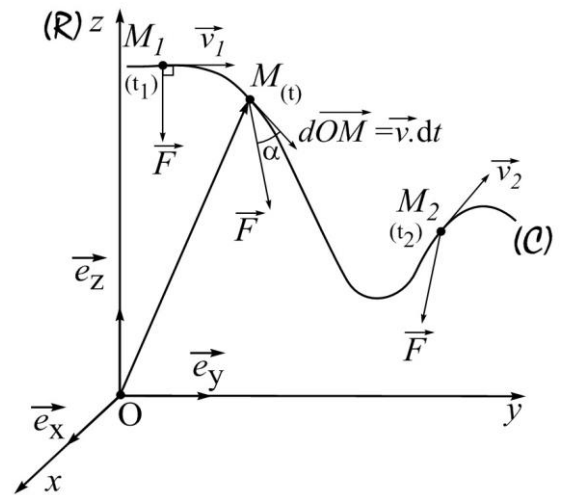
$$\Delta E_c = \int_{t_1}^{t_2} dE_c = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta W(\vec{F}_i) = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \delta W(\vec{F}_i) = \sum_i W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_i)$$

Donc sur un chemin fini : $\Delta E_c = \sum_i W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_i)$

(formulation « intégrale » du ThEc)

La variation de l'énergie cinétique, entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail des forces qui s'exercent sur le point matériel M entre ces deux instants.

Ex d'application : chute libre avec v initiale, glissement sur plan incliné, etc...



3

III. Energie potentielle d'un point matériel.

1. Force conservative et énergie potentielle

Définition : Une force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle (d'un « potentiel ») E_p lorsqu'on peut écrire le travail élémentaire sous la forme $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$ c'est-à-dire que $W(\vec{F})$ apparaît comme une **fonction intégrable** des coordonnées d'espace. On dit que $\delta W(\vec{F})$ est une **différentielle exacte**.

On dit alors que $\vec{F}$ est une **force conservative**

Propriété d'un champ de force conservatif : dans ce cas $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B -dE_p = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$

Le travail reçu par M de la part d'une force conservative est l'opposé de la variation de l'énergie potentielle du point associée à cette force : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = -\Delta E_p$

(on peut « stocker » l'énergie du travail reçu de la part de cette force)

Rq : ceci implique que le travail reçu $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ **ne dépend pas du chemin suivi** pour aller de A à B.

Rq : pour une trajectoire fermée (M repasse par son point de départ), $\Delta E_p = 0$ dc $W_{A \rightarrow A}(\vec{F}) = 0$!

2. Exemples de forces dérivant d'une énergie potentielle

a) Poids et énergie potentielle de pesanteur

On se place dans le réf terrestre, dans une zone de l'espace restreinte où le champ de pesanteur est uniforme : $\vec{g} = \overrightarrow{Cst}$. On utilise les coordonnées cartésiennes (Ox, Oy, Oz). Si la verticale Oz est ascendante :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z$$

-Pour un point matériel placé en M de masse m , le travail élémentaire du poids est

$$\delta W(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot d\vec{OM} = -mg\vec{e}_z \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = -mgdz$$

qu'on peut mettre sous la forme $\delta W(\vec{P}) = -dE_{p,p}$

en appelant $E_{p,p}$ l'énergie potentielle associée au poids dite « énergie potentielle de pesanteur » avec **$E_{p,p} = m\vec{g} \cdot \vec{z} + C_{\text{stte}}$**

La constante près à laquelle est définie $E_{p,p}$ n'a pas de valeur physique, elle est choisie arbitrairement, seules les variations de $E_{p,p}$ sur un trajet fini ont un sens physique :

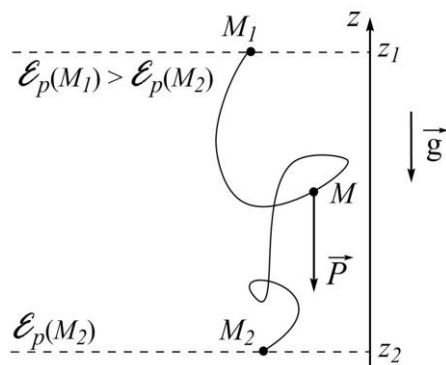
-Pour un trajet fini de A à B

$$W_{A \rightarrow B}(m\vec{g}) = \int_A^B -dE_{p,p} = -\Delta E_{p,p} = E_{p,p}(A) - E_{p,p}(B) = -mg \cdot \Delta z$$

$$W_{A \rightarrow B}(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot (\vec{z}_A - \vec{z}_B)$$

$$\text{Vérifions : } W_{A \rightarrow B}(m\vec{g}) = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{OM} = m\vec{g} \cdot \vec{AB} = 0 \cdot (x_B - x_A) + 0 \cdot (y_B - y_A) - mg(z_B - z_A) = m\vec{g} \cdot (\vec{z}_A - \vec{z}_B)$$

-nature des surfaces équipotentiels : ; plus l'altitude $\uparrow$, plus $E_{p,p} \uparrow$.



b) Énergie potentielle de gravitation.

Plaçons une masse M_T en O, fixe, et origine du repère (coordonnées sphériques). Une masse épreuve est placée en M, de valeur m.

La force subie par M est $\vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{e}_r$

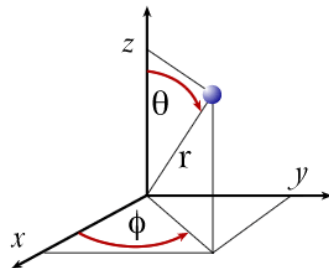
Pour un déplacement élémentaire qqe, $\delta W(\vec{F}_g) =$

D'où l'expression de $E_p =$

Choix de la constante d'intégration : en gnl, choisie telle que $E_p = 0$ pour r infini donc $C_{\text{stte}} =$

-plus r augmente, plus E_p augmente.

-nature des surfaces équipotentiels :

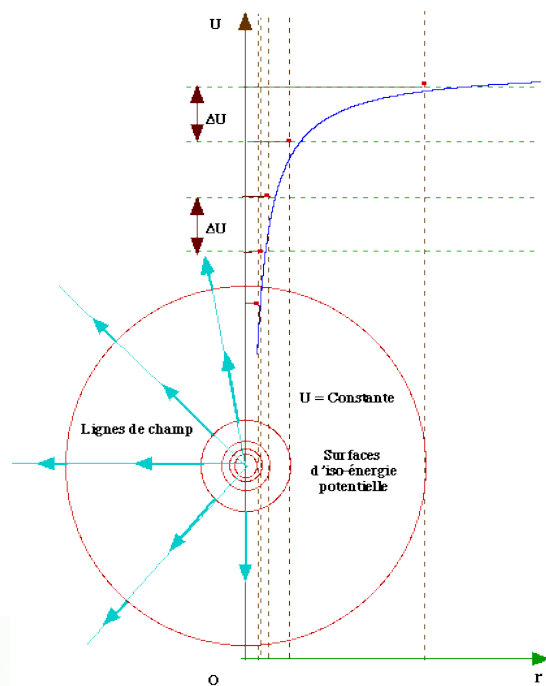


c) Énergie potentielle électrostatique

démarche similaire à b)

on rappelle la correspondance entre les 2 interactions : $m \leftrightarrow q$ et

$$-G \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$



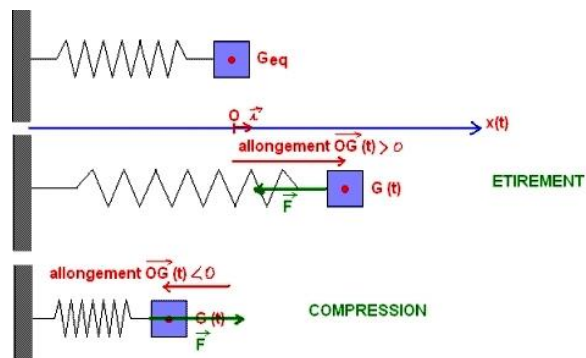
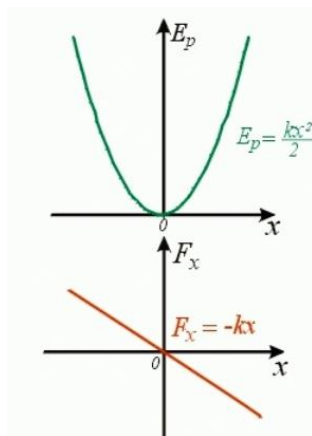
d) Énergie potentielle élastique.

Avec un axe des x orienté dans le sens d'un étirement, et l'origine étant pris à la position relâchée, x est l'allongement du ressort, la force de rappel élastique est $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{e}_x = -kx \vec{e}_x$ dc $\delta W(\vec{F}) = -kx \vec{e}_x \cdot d\vec{OM} = -kx \cdot dx$; par ailleurs, c'est aussi $\delta W(\vec{F}) = -dE_{p,el}$

En notant $E_{p,el}$ l'énergie potentielle élastique correspondante du ressort allongé de x (algébrique, càd comprimé ou étiré)

$$\text{On trouve } E_{p,el} = \frac{1}{2} kx^2 + C_{\text{stte}}$$

On a un puit de potentiel parabolique.



IV. Énergie mécanique

1) Définition

On appelle énergie mécanique d'un point matériel la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p$$

2) Intégrale première de l'énergie mécanique

Hyp : Soit un point matériel placé en M, de masse m dont les forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \dots$ qui lui sont appliquées :

- dérivent d'une énergie potentielle (càd sont conservatives)

- ou bien ne travaillent pas ($\perp$ au déplacement)

Appliquons alors le ThEc :

$$dE_c = \sum_i \delta W(\vec{F}_i) \quad , \quad \vec{F}_i \text{ désignant les forces conservatives qui travaillent}$$
$$= \sum_i (-dE_{pi}) = -dE_p \quad \text{dc} \quad d(E_c + E_p) = 0 \quad \text{soit} \quad dE_m = 0$$

Conclusion : Lorsqu'un point matériel se déplace dans un champ de force dérivant d'une énergie potentielle, son énergie mécanique reste constante au cours du mouvement. On dit qu'un tel système est conservatif.

$$E_m = C_{\text{ste}} \quad (\text{soit} \quad \dot{E}_m = 0)$$

Cette équation s'appelle l'**intégrale première** de l'énergie mécanique : c'est une loi de conservation ne faisant intervenir que les dérivées premières par rapport au temps (à la différence du P.F.D. ou du Théorème du Moment Cinétique qui conduisent à des équ. diff. du second ordre)

3) Théorème de l'énergie mécanique ; non conservation de E_m .

Notons $\vec{F}_{NC}$ la résultante des forces s'exerçant sur le point matériel et qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle : il s'agit de la résultante des forces *non conservatives*.

De même notons $\vec{F}_C$ la résultante des forces *conservatives*.

La résultante de toutes les forces est : $\sum \vec{F} = \vec{F}_{NC} + \vec{F}_C$

$$\text{ThEc:} \quad dE_c = \delta W(\vec{F}_{NC}) + \delta W(\vec{F}_C) = \delta W(\vec{F}_{NC}) - dE_p \quad \text{donc} \quad dE_m = \delta W(\vec{F}_{NC})$$

C'est le **théorème de l'énergie mécanique** sous sa forme intégrée :

$$\Delta E_m = W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{NC})$$

La variation (finie ou élémentaire) d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail (fini ou élémentaire) des forces non conservatives qui s'exercent sur lui.

Signification du ThEm :

- Si $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{NC}) > 0$, E_m augmente (l'extérieur apporte de l'énergie mécanique au système ; ex : une personne est sur un escalator la faisant monter)

- Si $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}_{NC}) < 0$, alors E_m diminue (à cause de frottements par exemple : une partie de E_m est convertie en énergie cinétique microscopique par transfert thermique ; ex : pendule lorsqu'on considère les frottements de l'air : au cours du temps il y a amortissement du mouvement du pendule car son E_m diminue, l'amplitude de ses oscillations diminue aussi).

4) Utilisation de l'intégrale première de l'énergie mécanique pour l'étude des problèmes à un paramètre

Exemple : Cas du pendule sans frottement (énergie mécanique constante E_0) :

On choisit Oz vertical ascendant, O pris au point fixe du fil.

La position du fil est repérée par l'angle θ

$$E_p = E_{p,g} = mgz + c^{te} = -mgl \cos \theta + c^{te}$$

On choisit (arbitrairement) la constante telle que $E_p = 0$ pour $\theta = 0$.

$$\text{dc} \quad E_p = mgl(1 - \cos \theta)$$

La base polaire est la plus adaptée : $v = l\dot{\theta}$

$$\text{De plus :} \quad E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

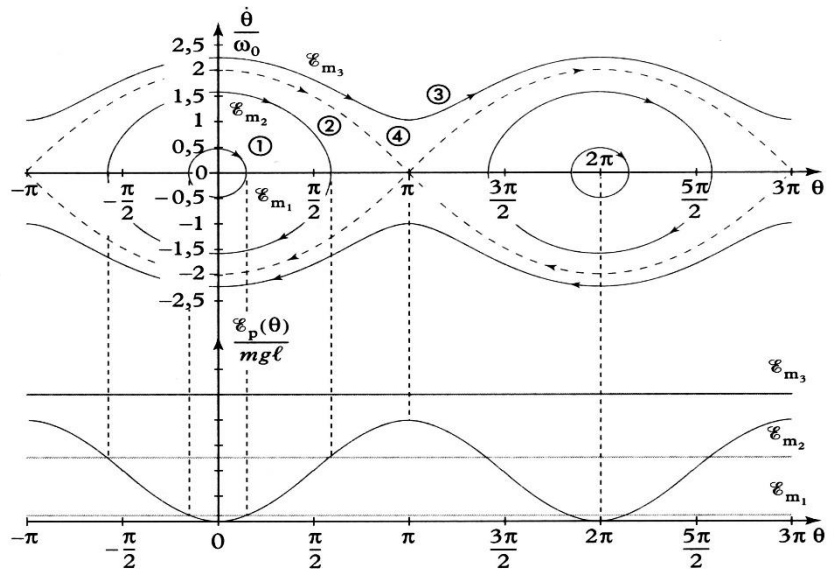
Le système { masse m } est soumis à 2 forces : le poids $\vec{P}$, force conservative, et la tension du fil $\vec{T}$, qui ne travaille pas, puisque tjs perpendiculaire au déplacement (projeter ds la base polaire)

$$\text{ThEm :} \quad dE_m = \delta W(\vec{F}_{NC}) \quad \text{soit} \quad \dot{E}_m = 0 \quad , \quad E_m = C_{\text{ste}} = E_0 \quad : \text{le système est conservatif.}$$

Dc on dérive E_m par rapport à t : $mgl\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}ml^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$ soit $ml\dot{\theta}(g\sin\theta + l\ddot{\theta}) = 0$ mais la solution correspondant à $\dot{\theta} = 0 \forall t$ est à exclure, dc $g\sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$
 soit encore $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$, ou encore $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$
 Rq : on a $E_0 = E_p + E_c$, mais $E_c \geq 0$ dc le mvt du pendule correspond aux valeurs de $E_0 \geq E_p$

Ccl : le mouvement ne peut avoir lieu que pour $E_0 \geq E_p$

Application : Pour connaître les mouvements possibles du pendule, il suffit de tracer le profil de E_p en fonction de θ et d'imposer la condition $E_0 \geq E_p$.



Portrait de phase et courbe d'énergie potentielle du pendule simple.

-pour des petites oscillations, on retrouve $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, on a un **oscillateur harmonique**.
 On peut aussi repartir de l'expression de $E_p = mgl(1-\cos\theta)$
 Et faire un développement de Taylor en fonction de θ au voisinage de $\theta=0$:

$$E_p(\theta) = E_p(0) + (\theta - 0) \left(\frac{dE_p}{d\theta} \right)_{\theta=0} + \frac{(\theta - 0)^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} = 0 + \theta \cdot 0 + mgl \cdot \frac{\theta^2}{2} = mgl \cdot \frac{\theta^2}{2} \quad \text{car } \frac{dE_p}{d\theta} = mgl \sin\theta \quad \text{et } \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgl \cos\theta$$

(cela revient à utiliser le DL de $\cos\theta$ autour de 0 : $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$)

On en déduit l'expression approchée de E_m autour de $\theta=0$: $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cdot \frac{\theta^2}{2}$ d'où $E_m = ml\dot{\theta}(l\ddot{\theta} + g\theta) = 0$

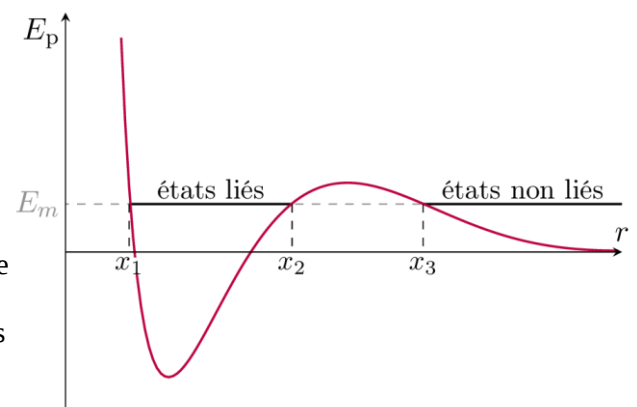
Dc $l\ddot{\theta} + g\theta = 0$ soit $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, équation de l'O.H. approché.

V. Equilibre et condition de stabilité

On prend un système à 1 dimension (variable x) conservatif
 ($E_m = C_{ste}$); Dans le diagramme de E_p ; seules les régions où $E_m \geq E_p$ sont accessibles.

1) Etats possibles pour M : états liés (M est borné à une zone de l'espace, et **états de diffusion** (M a accès à une zone infinie de l'espace)

Dans un cas la trajectoire dans le plan de phase est bornée, dans l'autre elle est ouverte



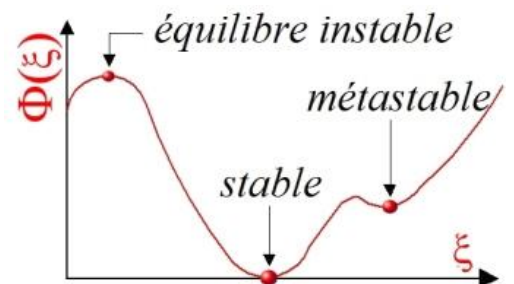
2) Equilibre et stabilité : Soit la courbe $E_p(x)$

$\frac{dE_p}{dx} = 0 \leftrightarrow$ c'est une position d'équilibre : le système peut rester immobile

Le signe de la concavité locale de la courbe donne le critère de stabilité

$\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0 \leftrightarrow$ équilibre **stable** $\leftrightarrow E_p$ mini (si le système est légèrement écarté de sa position d'équilibre ... il tend à y revenir) ; $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0 \leftrightarrow$ équilibre **instable** $\leftrightarrow E_p$ maxi (si ... , il tend à s'en écarter)

En effet si l'on considère de petites oscillations autour de l'état d'équilibre, le développement de T-L de la fonction autour de x_{eq} donne



$E_p(x) = E_p(x_{\text{éq}}) + (x - x_{\text{éq}}) \left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_{\text{éq}}} + \frac{(x - x_{\text{éq}})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{éq}}}$ en s'arrêtant à l'ordre 2 soit, comme $\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_{\text{éq}}} = 0$:

$$E_p(x) = E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{(x - x_{\text{éq}})^2}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{éq}}}$$

En appelant $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2} \right)_{x_{\text{éq}}} = k$ (parfois k_{eff}), $k > 0$ l'équilibre étant supposé stable ; alors on a, de façon approchée : $E_p(x) = E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2} k (x - x_{\text{éq}})^2$

On reconnaît une expression analogue à celle de l' E_p élastique d'un ressort ; en effet, on a approché l'énergie potentielle localement par une parabole (potentiel harmonique)

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2} k (x - x_{\text{éq}})^2$$

en dérivant par rapport à t , on obtient bien, avec $X = x - x_{\text{éq}}$:

$\ddot{X} + \frac{k}{m} X = 0$: les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable sont donc harmoniques

3) Force de rappel

Elle peut être déterminée à partir de la courbe de E_p approchée autour d'une position d'équilibre stable

Force de rappel conservative $\vec{F}(x) = - \frac{dE_p}{dx} \cdot \vec{e}_x = - k(x - x_{\text{éq}}) \cdot \vec{e}_x$

Appli : molécule HCl, électron dans l'atome de H, ...

