CHAPITRE 0 **Physique**

Dimensions et unités

Depuis le 20 mai 2019, toutes les unités du Système International sont définies à partir de constantes de la nature (célérité de la lumière dans le vide, charge élémentaire, constante de Planck, ...) ce qui ouvre la voie à l'utilisation de nouvelles technologies, y compris celles quantiques, pour mettre en pratique les définitions. Nous verrons que les unités jouent un rôle crucial en physique, et que leur utilisation permet de développer des outils puissants afin, par exemple, de vérifier la cohérence d'un résultat obtenu.

Plan du chapitre

Ce qu'il faut connaître

- ☐ Les sept dimensions et unités du système international

Ce qu'il faut savoir faire

- ☐ Écrire la dimension d'une grandeur physique (EC1).
- ☐ Déterminer la dimension ou l'unité d'une grandeur physique dans le système international (EC2, EC3).
- ☐ Vérifier l'homogénéité d'une expression (EC4).
- ☐ Déterminer les exposants d'une expression de type monôme $E = A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}$ par analyse dimensionnelle (EC5).

I - Grandeur, dimension et unité

I.A - Grandeur et mesure

Grandeur physique

C'est une propriété d'un phénomène, d'un évènement, d'un corps, que l'on peut exprimer par une mesure.

$\rightsquigarrow_1$ La vitesse, la pression, la température, la masse, la charge électrique, une force, sont toutes des grandeurs physiques.

La mesure

Une mesure est l'attribution, à une grandeur physique, d'une **valeur numérique** et d'une **unité**.

$\rightsquigarrow_2$ Prenons par exemple une table et mesurons sa longueur : $L = 122$ cm. Ceci signifie que la longueur L est la répétition de 122 fois l'unité "cm" (centimètre). Ceci permet donc de connaître L. Or on aurait tout aussi bien pu exprimer L de la manière suivante :

$$L = 1{,}22 \text{ m} \quad \text{ou} \quad L = 1220 \text{ mm} \quad \text{ou} \quad L = 48{,}0 \text{ pouces} \quad \text{ou} \quad L = 12{,}2 \text{ dm}$$

On voit ainsi que l'écriture d'un résultat numérique sans unité n'a aucun sens.

N'oubliez jamais de préciser l'unité lors de l'écriture d'un résultat numérique.

☛ **Entraînements 1.1 et 1.2**

I.B - Dimension et unité

• Dimension

Seules certaines grandeurs physiques peuvent être comparées entre elles. Il est par exemple naturel de comparer deux vitesses, alors que cela n'a aucun sens de comparer une vitesse et une longueur. On formalise cela par la notion de **dimension**.

Dimension d'une grandeur physique

Seules des grandeurs de même dimension peuvent être comparées. On dit alors qu'elles sont **homogènes**.
La dimension d'une grandeur physique X est notée entre crochets, $[X]$.

$\rightsquigarrow_3$ On note par exemple la dimension de l'énergie $[E]$, d'une force $[F]$ ou encore d'une vitesse $[v]$.

Remarque : Il existe également des grandeurs sans dimension, on dit qu'elles sont **adimensionnées**. On note dans ce cas $[X] = 1$. Tous les nombres (2, π, $\sqrt{2}$, ...), les angles, et le rapport de deux grandeurs homogènes sont des grandeurs adimensionnées. On peut par exemple écrire $[\pi] = 1$.

Combien faut-il de dimensions pour décrire la totalité des grandeurs physiques ? On voit qu'il y parfois des redondances : la vitesse est par exemple définie comme le quotient d'une distance par un temps. Il y a donc certaines dimensions, comme celle de la vitesse, qui ne sont pas *fondamentales*. La solution retenue est celle du Système International (SI), qui définit sept dimensions fondamentales indépendantes les unes des autres, regroupées dans le tableau ci-dessous.

Dimension	Symbole
Longueur	L
Masse	M
Temps	T
Intensité électrique	I
Température	Θ
Quantité de matière	N
Intensité lumineuse	J

Remarque : La dimension de toute grandeur physique est le produit ou le quotient de ces sept dimensions.

EC1 : Écriture d'une dimension

▷ Écrire la dimension des grandeurs physiques suivantes : vitesse v, concentration molaire C, masse volumique ρ.

• Unité

On voit ainsi qu'une dimension peut être associée à plusieurs unités : une distance peut s'exprimer dans les unités suivantes : nanomètre (nm), mètre (m), kilomètre (km), année-lumière (al). Toutefois, la dimension reste la même : celle d'une longueur, notée L.

Il est nécessaire, pour le bon déroulement des échanges techniques, commerciaux, scientifiques, que les unités de mesure soient définies une fois pour toute et de la même façon partout. Un mètre doit valoir la même chose en France et en Australie. C'est le Système International d'unités (ou S.I) qui est utilisé presque partout. Il définit sept unités de base, listées ci-dessous. Le système international d'unités (SI) associe à chaque dimension une unité fondamentale. Ces sept unités fondamentales ont été redéfinies en 2018 par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), qui a décidé de fixer certaines constantes fondamentales de la physique (c, h, k_B, e, $\mathcal{N}_A$, K_{CD}) pour redéfinir les unités.

• Unités du Système International

- ▷ L'unité de longueur, le **mètre (m)** : celui-ci est défini par rapport à la vitesse de la lumière. Un mètre correspond à la distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299 792 458 seconde. On fixe donc la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide.
- ▷ L'unité de masse, le **kilogramme (kg)** : le kilogramme est défini à partir de la constante de Planck, h = $6,626\ 070\ 15.10^{-34}$ J.s, dont la valeur est par convention exactement fixée.
- ▷ L'unité de temps, la **seconde (s)** : il s'agit de la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux quantiques de l'atome de césium 133.
- ▷ L'unité d'intensité électrique, **l'ampère (A)** : il est défini en prenant la valeur numérique fixée de la charge élémentaire, e, égale à $1{,}602\ 176\ 634.10^{-19}$C, unité égale à A.s, la seconde étant définie grâce aux transitions du césium 133.
- ▷ L'unité de température, le **kelvin** : il est défini en fixant la valeur numérique de la constante de Boltzmann k_B à exactement $1,\ 380\ 649.10^{-23}$ $\mathrm{J.K^{-1}}$.
- ▷ L'unité de quantité de matière, la **mole (mol)** : il s'agit de la quantité de matière d'un système contenant exactement $6,\ 022\ 140\ 76.10^{23}$ entités élementaires. Ce nombre correspond à la constante d'Avogadro N_A, dont la valeur est fixée.
- ▷ L'unité d'intensité lumineuse, la **candela (cd)** : elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10^{12} Hz, K_{CD}, égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $\mathrm{lm.W^{-1}}$. Cette unité est très peu utilisée et vous ne la rencontrerez pas cette année.

Dimension	Symbole	Unité de base
Longueur	L	Le mètre (m)
Masse	M	Le kilogramme (kg)
Temps	T	La seconde (s)
Intensité électrique	I	L'ampère (A)
Température	Θ	Le kelvin (K)
Quantité de matière	N	La mole (mol)
Intensité lumineuse	J	La candela (cd)

> **Remarque :** Si vous souhaitez plus d'informations sur la redéfinition du système international d'unités et sur son histoire, je vous invite à **cliquer ici**.

Les unités des grandeurs qui ne figurent pas dans le tableau ci-dessus doivent être obtenues en utilisant des relations physiques.

$\rightsquigarrow_4$ La vitesse s'écrit comme le quotient d'une distance par un temps : $v = d/t$. En termes d'unités SI, cela donne :

$$[v] = \frac{[d]}{[t]} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

EC2 : Unités SI (1)

▷ Déterminer l'unité SI d'une surface, d'un volume, d'une masse volumique, d'une accélération et d'une force.

II - Analyse dimensionnelle

II.A - Déterminer l'unité SI d'une grandeur

En pratique, trouver la dimension d'une grandeur se fait à partir de lois ou de relations connues, ou encore en connaissant son unité. Les égalités reliant entre elles la dimension de plusieurs grandeurs sont des **équations aux dimensions**. Elle se résolvent de la même manière que les équations classiques.

Méthode : déterminer l'unité SI d'une grandeur

- Si la grandeur est une des sept grandeurs de base, alors l'unité est l'unité SI associée.
- Si ce n'est pas le cas, alors il faut chercher une relation qui fait intervenir la grandeur étudiée.

$\rightsquigarrow_5$ Exemples : pour une énergie $E = \dfrac{1}{2}mv^2$, pour une force $F = ma$, pour une accélération $a = \dfrac{dv}{dt}$

- On utilise ensuite les règles suivantes :

▷ Un nombre pur n'a pas d'unité : $[\pi] = 1$, $[\sqrt{2}] = 1$, ...

▷ L'unité S.I. d'un angle est le radian. Cette unité ne compte pas dans les analyses dimensionnelles : $[\alpha] = 1$.

▷ Somme ou différence : $[A + B] = [A] + [B] = [A] = [B]$

▷ Produit : $[A \times B] = [A] \times [B]$

▷ Quotient : $\left[\dfrac{A}{B}\right] = \dfrac{[A]}{[B]}$

▷ Dérivée : $\left[\dfrac{dY}{dX}\right] = \dfrac{[Y]}{[X]}$

▷ Intégrale : $\left[\displaystyle\int Y dX\right] = [Y] \times [X]$

$\rightsquigarrow_6$ La relation d'Einstein s'écrit $E = mc^2$, donc $[E] = [m] \times [c^2] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$

EC3 : Unités SI (2)

▷ Déterminer l'unité SI d'une force, d'une puissance (en sachant qu'une puissance est le produit d'une énergie par un temps), d'une capacité calorifique C_v (en sachant que $C_v = \dfrac{dE}{dT}$), d'une tension (en sachant que $[R] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-2}$)

II.B - Homogénéité : un outil de vérification

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une relation. Si celle-ci est inhomogène, c'est-à-dire si les grandeurs de part et d'autre de l'égalité n'ont pas la même dimension, cela signifie nécessairement que la relation est fausse. On retiendra donc la règle suivante.

Une relation inhomogène est nécessairement fausse.
Pensez toujours, lorsque c'est possible, à vérifier l'homogénéité de vos relations !

$\rightsquigarrow_7$ La relation $v = gt^2$, où g désigne l'accélération de pesanteur et t un temps est inhomogène :

$$[v] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \quad \text{alors que} \quad [gt^2] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \times \mathrm{s}^2 = \mathrm{m}$$

Cette relation est donc fausse.

Remarque : Ce n'est pas parce qu'une relation est homogène qu'elle est nécessairement vraie. Cependant, une relation qui ne l'est pas est toujours fausse. L'analyse dimensionnelle est donc un outil extrêmement puissant pour vérifier vos résultats lors d'un exercice ou d'une évaluation et valider (ou non) ce dernier.

EC4 : Vérifier l'homogénéité d'une relation

Les relations suivantes sont-elles homogènes ? Justifier à l'aide d'un calcul aux dimensions. Si elles sont inhomogènes, proposer une relation homogène correspondante.

1. **Surface** $S = \pi(R + r^2)$
2. **Période** $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (l désigne la longueur du pendule)
3. **Altitude** $z = \dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{t}{v_0}$
4. **Force** $F = 6\pi\eta R v^2$ (η désigne la viscosité dynamique du fluide en $\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$, R le rayon de l'objet sphérique et v sa vitesse).

II.C - Prédiction d'un résultat par analyse dimensionelle

Présentons la méthode sur un exemple. On considère un oscillateur masse-ressort horizontal : un solide de masse m est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est fixée à un bâti. Le ressort est initialement étiré selon un allongement initial Δl, puis lâché sans vitesse initiale. On observe des oscillations périodiques, de période T_0

➪ Comment exprimer T_0 en fonction des paramètres m, k et Δl ?

Méthode : prédire un résultat par analyse dimensionelle

- On isole la grandeur dont on cherche l'expression (ici la période T_0), et on liste les paramètres dont cette grandeur peut dépendre. Ici elle peut dépendre de m, k et Δl.
- On écrit les unités de ces grandeurs dans le S.I.
- On écrit la grandeur recherchée sous la forme

$$T_0 = A\, m^a\, k^b\, \Delta l^c$$

où A est une constante sans dimension.

- Puis on impose à la relation d'être homogène afin de trouver les valeurs des exposants.

Résolution : d'après le principe d'homogénéité, il existe trois exposants a, b et c et une constante sans dimension A de telle manière que la relation

$$T_0 = A\, m^a\, k^b\, \Delta l^c$$

soit homogène. On peut alors écrire sans ambiguïté la relation aux dimensions suivantes :

$$[T_0] = T = [A\, m^a\, k^b\, l^c] = [m]^a\, [k]^b\, [\Delta l]^c$$

On sait que $[m] = \mathrm{M}$ et que $[\Delta \mathrm{l}] = \mathrm{L}$. On peut déterminer la dimension de la raideur k, qui s'exprime en N/m :

$$[k] = \frac{[\text{force}]}{L} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L} = M \cdot T^{-2}$$

On peut donc écrire l'équation aux dimensions suivantes :

$$T = M^a \times M^b \times T^{-2b} \times L^c$$

Par identification dans les deux membres de l'équation, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 1 = -2b & \text{(dimension T)} \\ 0 = a + b & \text{(dimension M)} \\ 0 = c & \text{(dimension L)} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} b = -1/2 \\ a = 1/2 \\ c = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad T_0 = A\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Nous montrerons cette année que la période T_0 d'un tel oscillateur s'exprime $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, la constante est donc égale à 2π, ce qui était impossible à prévoir par analyse dimensionnelle.

Nous voyons donc ici la puissance d'une telle analyse, nous pouvons grâce à cet outil donner une expression approchée de la période des oscillations, avec la dépendance correcte vis-à-vis des paramètres mis en jeu. Et ce, sans résoudre d'équation différentielle !

Évidemment, cette méthode présente une limite évidente : il faut avoir au préalable identifié les paramètres de contrôle du système ce qui n'est a priori pas du tout évident.

EC5 : Modèle de Rayleigh de la vibration d'une étoile

La cohésion d'une étoile est assurée par les forces de gravitation. On s'attend donc à devoir faire intervenir le rayon de l'étoile R, sa masse volumique ρ et la constante de gravitation universelle G (en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$) qui intervient dans la force gravitationnelle.

▷ Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, ρ et G grâce à l'équation aux dimensions ci-dessous :

$$f = R^a\, \rho^b\, G^c$$