TD Dimensions et unités

Top chrono !

▷ En 5' chrono, déterminer l'unité SI d'un maximum de grandeurs données ci-dessous.

Notations : m masse, v vitesse, F force, E énergie, T température, P pression, V volume.

1. Quantité de mouvement p telle que $p = mv$
2. Coefficient de frottement α tel que $F = -\alpha v$
3. Constante de raideur k telle que $F = k(l - l_0)$ (l désigne une longueur)
4. Constante de Boltzmann k_B telle que $E = \dfrac{1}{2}k_B T$
5. Constante des gaz parfaits R telle que $PV = nRT$
6. Rendement η d'un moteur ditherme : $\eta = 1 - \dfrac{T_f}{T_c}$
7. Moment d'inertie J tel que $E = \dfrac{1}{2}J\omega^2$ (ω pulsation en rad.s^{-1})
8. Constante de Planck h telle que $E = \dfrac{hc}{\lambda}$ (c célérité de la lumière, λ longueur d'onde)

Avec le cahier d'entraînement

⇝ **Autour des unités :** entraînements 1.3, 1.5, 1.15, 1.21.

Pour bien démarrer

Exercice n°1 - Unités de Planck (★)

En physique, le système d'unités de Planck est un système d'unités de mesure défini uniquement à partir de constantes physiques fondamentales comme la célérité de la lumière c, la constante de Planck réduite $\hbar$ ($\hbar = h/2\pi$), la constante de gravitation universelle G et k_B la constante de Boltzmann.

1. Parmi les quatre grandeurs ci-dessous, identifier la grandeur correspondant à une longueur.

$$(1)\ \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad (2)\ \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad (3)\ \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \quad (4)\ \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

2. Déterminer l'unité SI de la grandeur suivante

$$\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$$

Traités en TD

Exercice n°2 - Troisième loi de Kepler (★★)

En astronomie, les lois de Kepler décrivent les propriétés du mouvement des planètes autour du Soleil. Dans cet exercice, on se propose de déterminer la troisième loi de Kepler par analyse dimensionnelle. On rappelle tout d'abord l'expression de la force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses m et M :

$$F = \frac{GmM}{R^2}$$

où G est la constante universelle de gravitation et R la distance entre les deux masses.

1. Rappeler les dimensions de m, R et F.
2. Quelle est la dimension de G ? En déduire son unité dans le Système International (SI).

On considère une planète de masse m effectuant une trajectoire circulaire de rayon R autour du Soleil de masse M. Soit T la période de révolution de la planète.

3. Par analyse dimensionnelle, déterminer les constantes a, b et c telles que :

$$T = 2\pi R^a G^b M^c$$

4. En déduire l'expression de la **3ème loi de Kepler**, que l'on exprimera sous la forme $\dfrac{T^2}{R^3} = k$, où k est une constante à déterminer en fonction des données.

Exercice n°3 - Trinity (★★)

Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau-Mexique, dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet était classées ultra-secrètes par la CIA.

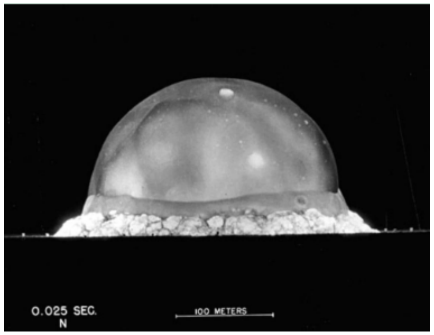

Figure 1: Photo de l'explosion nucléaire du projet Trinity

Pourtant, le physicien anglais G. I. Taylor a pu estimer l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée par cette explosion par une analyse dimensionnelle judicieuse sur la base d'un film. Le film permet de suivre au cours du temps le rayon R(t) du "nuage" formé par l'explosion. Cet exercice propose de reproduire le raisonnement de Taylor.

Des connaissances en mécanique des fluides et thermodynamique suggèrent que les paramètres influant sur le rayon du nuage sont évidemment le temps t s'étant écoulé depuis l'explosion et l'énergie E libérée par l'explosion, mais aussi la masse volumique de l'air ρ.

1. Établir la dimension d'une énergie en fonction des dimensions de bases du système international.
2. Taylor a supposé que le rayon du nuage s'écrit en fonction des paramètres cités ci-dessus sous la forme :
$$R(t) = E^a t^b \rho^c$$
où a, b et c sont trois constantes. Déterminer ces constantes par le calcul.
3. Déduire de la question précédente l'expression de l'énergie libérée en fonction de R, t et ρ.
4. Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur numérique à partir de la photographie.
5. Plusieurs années plus tard, la CIA a révélé que les mesures réalisées sur place permettaient d'estimer que l'énergie libérée par la bombe était d'environ 20 kilotonnes de TNT. Sachant que l'explosion de 1 kg de TNT libère environ $4{\cdot}10^6$ J, calculer l'énergie libérée par l'explosion Trinity et commenter la qualité du résultat obtenu par analyse dimensionnelle.

• Éléments de réponse

Top chrono

1. kg·s
2. kg·s^{-1}
3. N·m^{-1}, ou kg·s^{-2}
4. J·K^{-1}, ou kg·m^2·s^{-2}·K^{-1}
5. J·K^{-1}·mol^{-1}, ou kg·m^2·s^{-2}·K^{-1}·mol^{-1}
6. Sans unité !
7. kg·m^2
8. J·s, ou kg·m^2·s^{-1}

Exercice n°1

1. (2) 2. Kelvin (K)

Exercice n°2

4. $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$

Exercice n°3

2. a = 1/5, b = 2/5, c = -1/5 4. $E \approx 1,2 \cdot 10^{14}$ J 5. $E \approx 8 \cdot 10^{13}$ J