Informations

• Ce devoir est **facultatif**. Si vous le souhaitez, vous pouvez me le rendre le **Jeudi 28 Septembre**. Je vous conseille d'y consacrer **2 heures** en conditions réelles.

• **Ceinture bleue** : exercice n°1, Q1 à Q6 + exercice n°2, Q1 à Q6.

• **Ceinture noire** : l'intégralité du devoir.

Exercice n°1 : Étude de l'arc-en-ciel

Adapté du concours X-ENS 2008 (filière MP)

L'objectif de ce problème est d'expliquer comment se forme un arc-en-ciel lorsque la pluie et le soleil sont simultanément présents.

1. Énoncer les lois de Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction entre deux milieux homogène isotropes d'indices n_1 et n_2.

2. Qu'est-ce que le phénomène de réflexion totale ? Calculer l'angle d'incidence limite au-delà duquel il y a réflexion totale lorsque les deux milieux sont l'eau d'indice 1,33 et l'air d'indice 1,00.

Un arc-en-ciel se produit lorsque les rayons du soleil sont réfléchis par des gouttes d'eau sphériques en suspension dans l'air. Le schéma suivant représente le trajet suivi par un rayon lumineux qui subit une seule réflexion à l'intérieur de la goutte d'eau.

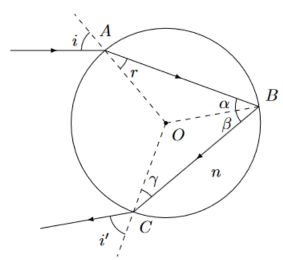

Figure 1: Trajet d'un rayon dans une goutte d'eau

3. Donner la relation entre l'angle de réfraction r à l'intérieur de la goutte, i et n.

4. Le rayon subit en B une réflexion sur l'interface eau-air. Cette réflexion peut-elle être totale ?

5. Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = r$, et en déduire que $i' = i$.

6. Montrer que la déviation D subie par le rayon entre l'entrée et la sortie de la goutte est $D = \pi + 2i - 4r$.

Les rayons du soleil arrivant parallèlement les uns aux autres, ils éclairent parallèlement toute la goutte et couvrent donc tous les angles d'incidence entre 0 et $\pi/2$. Un rayon arrivant sur la goutte avec un angle d'incidence nul subira une déviation de 180°. Nous allons montrer qu'il existe un angle de déviation minimum, noté D_m.

7. L'angle de réfraction r est une fonction de l'angle d'incidence i, on note $r(i)$. En dérivant l'équation obtenue à la question 3, montrer que :

$$\frac{dr}{di} = r'(i) = \frac{\cos i}{n \cos r(i)}$$

8. Donner l'expression de $r(i)$.

9. L'angle de déviation minimum D_m est atteint pour un angle d'incidence i_m tel que $\frac{dD(i)}{di}(i_m) = 0$. Montrer que cette relation est équivalente à la relation :

$$\frac{\cos i_m}{n \cos\left(\arcsin \frac{\sin i_m}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

10. En utilisant l'égalité $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, montrer que l'on obtient :

$$\cos^2 i_m = \frac{n^2-1}{3}$$

11. En déduire que la déviation minimale est donnée par la formule :

$$D_m = D(i_m) = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right) - 4\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}\right) + \pi$$

12. Calculer la valeur numérique de D_m.

On supposera dans la suite que la majeure partie de l'intensité renvoyée par la goutte d'eau l'est dans la direction D_m, il y a accumulation de la lumière dans cette direction. En réalité, l'indice de l'eau augmente avec la longueur d'onde λ, donc la déviation minimale de la lumière diminue avec λ. Sur le schéma ci-dessous on représente une goutte d'eau sur laquelle arrive les rayons du Soleil ainsi que les rayons extrêmes réfléchis pour de la lumière rouge et de la lumière bleue.

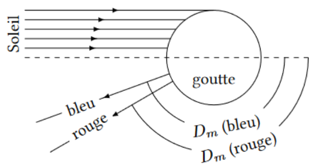

Figure 2: Déviation des rayons lumineux par une goutte d'eau

13. En vous appuyant sur cette représentation et sur un schéma aussi clair que possible, indiquer dans quelle direction un observateur doit regarder pour voir un arc-en-ciel, expliquer sa forme d'arc de cercle, et la présence de la couleur rouge à l'extérieur de l'arc. (on pourra indiquer quelles sont les gouttes d'eau qui pourront renvoyer de la lumière rouge vers l'observateur et quelles sont celles qui lui renvoient de la couleur bleue).

Exercice n°2 : Optique de l'appareil photo

D'après CCINP 2021, filière MP

I. Objet et image

On modélise un appareil photo (figure 3) par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée "objectif", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.
La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif, elle est comprise entre d_{min} et d_{max}. À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance L devant l'objectif.

1. La lentille mince est utilisée dans les conditions de Gauss.

   (a) Préciser en quoi les conditions de Gauss consistent, et quelles conséquences elles ont pour la formation d'une image.

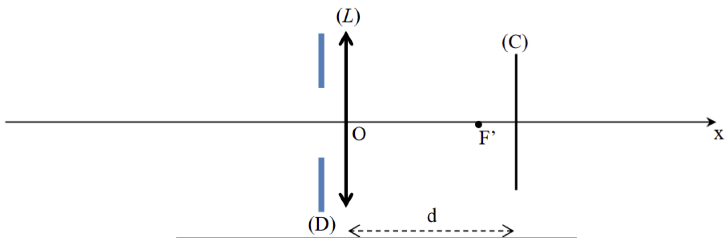

Figure 3: Modélisation de l'appareil photo

   (b) Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

2. Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et $A'B'$ son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $A'B'$.

3. Exprimer la taille $A'B'$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h, f' et L. Calculer cette taille avec $f' = 50$ mm, $h = 5$ m et $L = 20$ m.

4. Quelle est la distance d lorsque l'objet est à l'infini ?

II. Objectifs

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour L). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale $f'_1 = 100$ mm. La distance d est toujours réglable.

5. Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?

6. Si on suppose que le capteur a pour dimensions : 24 mm $\times$ 36 mm , sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

L'objectif utilisé est appelé "téléobjectif" ou "objectif de longue focale". Sur un site internet dédié à la photographie, on peut lire que ce genre d'objectif "rapproche les objets".

7. Commenter cette phrase en indiquant la part de vérité ou d'inexactitude qu'elle contient. Un raisonnement et un calcul numérique sont attendus (en utilisant une approximation justifiée).

On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L_1) convergente et une lentille (L_2) divergente, séparées par une distance e. La distance L entre (L1) et l'arbre n'a pas changé.

8. La lentille (L_1), de focale f_1', donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L_2), de focale f_2', qui en donne une image finale $A'B'$.

   (a) Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de f_1' et e (en utilisant une approximation justifiée).

   (b) L'image $A'B'$ doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise. Exprimer cette condition sur e sous la forme d'une double inégalité sur e, f_1' et f_2' (en utilisant une approximation justifiée).

   (c) Vérifier que cette condition est réalisée avec $f_1' = 10$ cm, $f_2' =$ - 5 cm et $e = 8$ cm.

9. Avec les valeurs numériques de la question précédente :

   (a) Calculer la distance d.

   (b) Calculer la taille de l'image $A'B'$ de l'arbre sur le capteur.

   (c) Indiquer si ce téléobjectif est équivalent à l'objectif de la question 5.