CHAPITRE 4 **Physique**

Thème *Ondes et signaux*

Circuits linéaires du premier ordre

Dans ce chapitre, nous allons mettre à profit les outils développés dans le chapitre précédent pour étudier les circuits linéaires du 1er ordre, c'est-à-dire des circuits dont l'évolution temporelle est régie par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Nous étudierons en détails le circuit RC (résistance et condensateur) et le circuit RL (résistance et bobine). **Dans tout le chapitre, l'étude sera effectuée dans l'ARQS.**

I - Cadre d'étude

I.A - Définition

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont la variation des grandeurs électriques (tension, intensité) est régie par une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constants (EDL d'ordre 1 à coeffs. constants).

EDL d'ordre 1 à coefficients constants

Une EDL d'ordre 1 à coeffs. constants s'écrit sous la **forme canonique :**

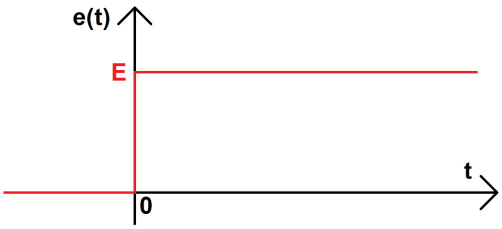
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = C$$

où τ désigne la **constante de temps** du système ($[\tau] = T$), et C une constante.

- ▷ **1er ordre :** la dérivée de plus haut ordre est une dérivée première.
- ▷ **Coefficients constants :** les coefficients τ et C ne dépendent pas du temps.
- ▷ **Linéaire :** pas de termes en x^2, x^3, sin(x), ...

I.B - Échelon de tension

Un échelon de tension est une tension qui présente une discontinuité à un certain instant : elle passe "brusquement" d'une valeur à une autre.



Mathématiquement, un échelon de tension est défini comme :

$$\mathrm{e(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ E & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

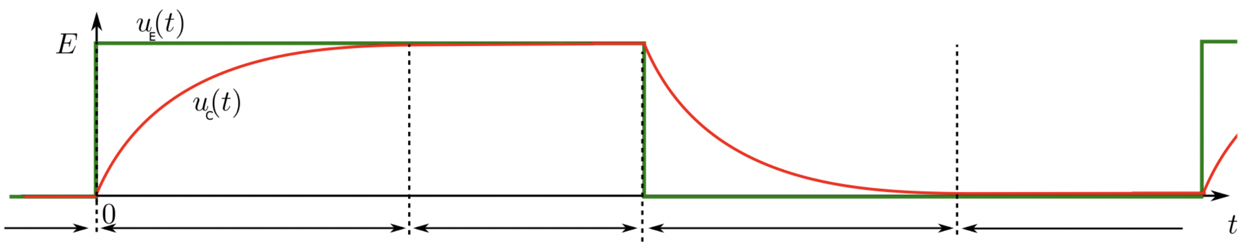
Nous allons dans ce chapitre étudier la réponse d'un circuit électrique à ce type de signal.

I.C - Régime transitoire vs régime permanent

Nous allons étudier l'évolution temporelle des grandeurs électriques. Il faudra dans cette étude distinguer deux régimes :

- ▷ le **régime transitoire**, pendant lequel les grandeurs électriques varient dans le temps, avec un temps caractéristique τ.
- ▷ le **régime permanent**, pour lequel les grandeurs électriques ne varient plus dans le temps. Celui-ci est nécessairement précédé d'un régime transitoire.

$\rightsquigarrow_1$ La figure ci-dessous présente l'oscillogramme obtenu par étude de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RC, alimenté par un GBF. Identifier les zones correspondant à un régime transitoire (RT) et à un régime permanent (RP).



> **Remarque :** on parle également de **régime libre** lorsque le système n'est alimenté par aucune source d'énergie. L'entrée du système est donc nulle : $e(t) = 0$.

II - Comportement de la bobine et du condensateur

II.A - Propriétés de continuité

Rappels : lois de comportement de la bobine et du condensateur (en convention récepteur)

- ▷ pour le condensateur, $i = C\dfrac{du_c}{dt}$ avec C la capacité en Farad (F)
- ▷ pour la bobine, $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ avec L l'inductance en Henry (H).

Le produit de la tension par l'intensité correspond à la puissance électrique. Or, comme ces relations de comportement font intervenir une dérivée, si la fonction présente une discontinuité, sa dérivée est infinie, ce qui n'est pas acceptable physiquement. On en déduit alors les propriétés de continuité suivantes.

Propriétés de continuité

- ▶ La tension aux bornes d'un condensateur est nécessairement continue.
- ▶ L'intensité traversant une bobine est nécessairement continue.

Cela signifie que ces grandeurs ne pourront pas varier de manière discontinue comme l'échelon de tension : il y aura un certain "temps de retard", caractérisé par τ.

Remarque : pour s'en souvenir, il suffit de se rappeler de la loi de comportement, et de savoir que c'est la grandeur dérivée qui est nécessairement continue.

II.B - Comportement en régime permanent

En régime permanent, les grandeurs électriques sont indépendantes du temps. Cela signifie que leurs dérivées temporelles sont nulles.

▷ Pour le condensateur, $i = C\dfrac{du_c}{dt} = 0$. Aucun courant ne traverse le condensateur en régime permanent : il se comporte comme un interrupteur ouvert.

Équivalence du condensateur en régime permanent

En **régime permanent**, le condensateur est équivalent à un **interrupteur ouvert** ($i = 0$).

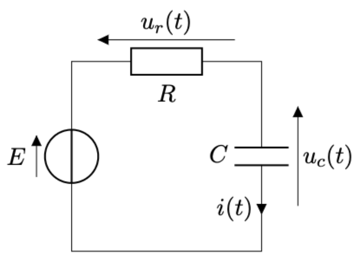
▷ Pour la bobine, $u_L = L\dfrac{di}{dt} = 0$. Il n'y a aucune tension aux bornes de la bobine en régime permanent : elle se comporte comme un fil de connexion.

Équivalence de la bobine en régime permanent

En **régime permanent**, la bobine est équivalente à un **fil de connexion** ($u_L = 0$).

III - Étude du circuit RC

III.A - Présentation et étude qualitative



Initialement, le condensateur est déchargé. Le générateur de tension fournit un échelon de la forme :

$$\mathrm{e(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ E & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

▷ À $t = 0^-$, $i(t = 0^-) = 0$: aucun courant ne circule dans le circuit.

▷ À $t = 0^+$, par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$.

▷ La charge s'arrête lorsque $i = 0$ (plus aucune courant ne circule). Par loi des mailles, on a alors :

$$\frac{1}{R}(e(t) - u_c(t)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_c = E \tag{1}$$

On a donc :

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{à} \quad t = 0 \\ E & \text{à} \quad t = \infty \end{cases}$$

III.B - Étude quantitative de la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension (charge)

• Mise en équation

On applique la loi des mailles au circuit pour $t > 0$:

$$E = u_c(t) + u_r(t) \tag{2}$$

Or, $u_r(t) = Ri(t) = RC\dfrac{du_c}{dt}$ d'après les lois de comportement. On a donc :

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$$

Pour mettre l'équation différentielle sous forme canonique, il faut **diviser par le coefficient multiplicatif devant la dérivée de plus haut ordre**. En mettant cette équation sous forme canonique, on obtient :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC}$$

En identifiant à la forme canonique donnée dans le I, on a alors :

$$\tau = RC$$

Il s'agit bien d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Charge du circuit RC série

L'équation différentielle régissant la charge d'un circuit RC est donnée par :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau}u_c = \frac{E}{\tau}$$

où $\tau = RC$ est le temps caractéristique du circuit.

Remarque : si le circuit comporte plusieurs résistances et/ou plusieurs condensateurs, la constante de temps est modifiée mais est toujours homogène au produit RC.

• Solution générale de l'équation différentielle

De manière générale, la solution d'une équation différentielle est la somme de deux contributions.

1. La solution **homogène**, notée $u_H(t)$ qui est la solution de l'équation homogène (équation sans second membre) :

$$\frac{du_H}{dt} + \frac{1}{\tau}u_H = 0 \quad \text{où} \quad u_H(t) = A\exp -\frac{t}{\tau}$$

   avec A une constante d'intégration. Cette solution caractérise le régime transitoire du circuit.

2. La **solution particulière**, notée u_p qui est la solution de l'équation indépendante du temps ($\dfrac{du_p}{dt} = 0$) :

$$\frac{1}{\tau}u_p = \frac{E}{\tau} \quad \text{donc} \quad u_p = E$$

3. La solution totale de l'équation différentielle est la somme de ces deux contributions :

$$u_c(t) = A \exp -\frac{t}{\tau} + E$$

• Détermination de la constante d'intégration grâce aux conditions initiales

Pour déterminer la constante d'intégration A, on utilise les conditions initiales.

À $t = 0^+$, par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_c(0^+) = 0$. En remplaçant u_c par son expression générale obtenue précédemment, on a :

$$u_c(0^+) = 0 = A \exp -\frac{t}{\tau} + E \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\text{A = -E}}$$

La solution est alors totalement déterminée :

$$u_c(t) = E\left(1 - \exp -\frac{t}{\tau}\right)$$

• Représentation graphique de la solution

En reprenant la solution $u_c(t)$ établie précédemment, on peut calculer les limites en $t = 0$ et $t = \infty$.

▷ Pour $t = 0$, $u_c(0) = 0$

▷ Pour $t = \infty$ (régime permanent), $u_c(\infty) = E$

On retrouve ainsi les résultats prévus par l'analyse qualitative. La représentation graphique de u_c est donnée ci-dessous.

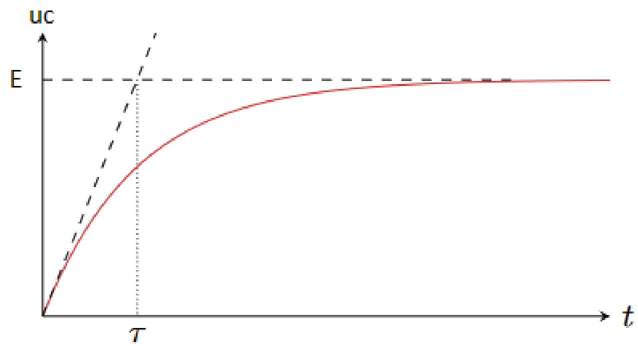


FIGURE 1 – Charge du circuit RC : représentation de u_c en fonction du temps.

Détermination graphique de τ

L'abscisse de l'intersection entre la pente à l'origine de u_c et l'asymptote en régime permanent correspond au temps caractéristique τ du circuit.

On peut également, dans le cas de la charge du circuit, déterminer τ d'une autre manière. Quand $t = \tau$, $u_c(\tau) = E(1 - \exp(-1))$. On trouve alors :

$$u_c(t = \tau) = 0,63E$$

Ainsi, l'abscisse de l'intersection entre la droite $0,63E$ et la courbe de u_c correspond au temps caractéristique τ du circuit.

La distinction entre régime transitoire et régime permanent se fait pour $t = 5\tau$: en reprenant le raisonnement précédent, on trouve :

$$u_c(t = 5\tau) = 0,99E$$

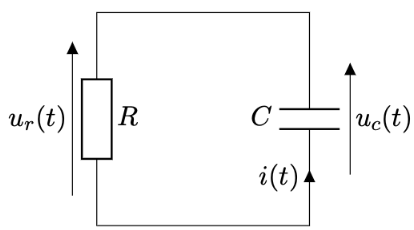
Régime permanent

On considère que le régime permanent est atteint lorsque $t = 5\tau$.

III.C - Régime libre du circuit RC (décharge)

• Mise en équation

Le **régime libre** est observé lorsque toutes les sources sont éteintes. Dans ce cas, le condensateur initialement chargé va se comporter comme un générateur qui va se décharger dans la résistance R du circuit.



On applique la loi des mailles :

$$u_R(t) = u_c(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Ri(t) = u_c(t)$$

Or, le condensateur est orienté en convention générateur : sa loi de comportement s'écrit donc $i = -C\dfrac{du_c}{dt}$.

En remplaçant $i(t)$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_c(t) = 0$$

On peut alors identifier avec la forme canonique : le temps caractéristique τ est donné par le produit RC.

Décharge du circuit RC série

L'équation différentielle régissant la décharge du circuit RC série est donnée par :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_c(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

• Solution de l'équation différentielle

Ici, l'équation différentielle est **homogène** (second terme nul) : la solution est donc simplement la solution homogène, à savoir :

$$u_c(t) = A\exp -\frac{t}{\tau}$$

• Détermination de la constante

On peut déterminer la constante d'intégration A grâce aux conditions initiales : à $t = 0^-$, le condensateur est chargé à la tension E. Ainsi, par continuité, $u_c(t = 0^+) = E$. Soit $A = E$. Finalement, la tension aux bornes du condensateur en régime libre s'écrit :

$$u_c(t) = E\exp -\frac{t}{\tau}$$

- **Représentation graphique**

En reprenant la solution $u_c(t)$ établie précédemment, on peut calculer les limites en $t = 0$ et $t = \infty$.

▷ Pour $t = 0$, $u_c(0) = E$

▷ Pour $t = \infty$, $u_c(\infty) = 0$

La tension u_c a donc une allure d'exponentielle décroissante de E à 0, comme sur la figure 2 ci-dessous. On détermine τ grâce à l'intersection entre la pente à l'origine et la valeur de u_c en régime permanent, à savoir 0 ici.

> **Remarque :** Attention ! Cette fois, lorsque $t = \tau$, seulement 37% du régime permanent est atteint.

III.D - Bilan énergétique du circuit RC

Reprenons le cas de la charge du circuit RC étudiée à la partie III.B. La loi des mailles s'écrit :

$$E = u_c(t) + u_r(t)$$

Pour réaliser un bilan énergétique du circuit, il faut faire apparaître la puissance électrique, définie comme le produit d'une tension par une intensité. On va donc multiplier l'équation précédente par $i(t)$.

Bilan énergétique d'un circuit

Pour réaliser le bilan énergétique d'un circuit, on multiplie la loi des mailles par $i(t)$.

- **Cas de la charge**

On a dans ce cas :

$$E \times i(t) = u_c(t) \times i(t) + u_r(t) \times i(t) \tag{3}$$

Or, $u_r(t) = R \times i(t)$: on fait ainsi apparaître la **puissance dissipée par effet Joule** dans la résistance $P_J = R \times i^2$. Le premier terme s'écrit :

$$u_c(t) \times i(t) = C u_c(t) \frac{du_c(t)}{dt}$$

Or, $u_c \dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(u_c^2)$. Ainsi, on peut réecrire l'équation (3) :

$$E \times i(t) = R \times i^2(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_c(t)^2\right)$$

Bilan énergétique de la charge du circuit RC

Lors de la charge du circuit RC, la puissance électrique $E \times i$ fournie par le générateur se divise en deux parties :

1. Le terme $R \times i^2$ s'interprète comme la **puissance dissipée par effet Joule dans la résistance**.
2. Le terme $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{2} C u_c^2) = \dfrac{dE_C}{dt}$ s'interprète comme la **puissance reçue par le condensateur**, où l'on reconnaît l'énergie stockée par le condensateur $\frac{1}{2} C u_c^2$.

• Cas du régime libre

En régime libre, le même raisonnement conduit au bilan énergétique suivant :

$$R.i^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu_c^2\right)$$

Bilan énergétique du circuit RC en régime libre

En régime libre, toute la puissance stockée dans le condensateur est dissipée par effet Joule dans la résistance.