Exercice n°1 : Étude de l'arc-en-ciel

Adapté du concours X-ENS 2008 (filière MP)

1. Lois de la réflexion :

- ▷ Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.
- ▷ L'angle d'incidence i_1 et l'angle de réflexion i_r sont égaux (angles non orientés).

Lois de la réfraction :

- ▷ Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence.
- ▷ L'angle d'incidence i_1 et l'angle de réfraction i_2 sont liés par la relation :

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

2. Au-delà d'un certain angle, lorsqu'un rayon incident arrive sur une interface séparant un milieu moins réfringent d'un milieu plus réfringent, ce dernier est totalement réfléchi. Ce phénomène se produit si l'angle d'incidence est plus grand que α_{lim}, donné par :

$$n_1 \sin \alpha_{\text{lim}} = n_2 \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\alpha_{\text{lim}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = 48,9°}$$

3. D'après les lois de la réfraction au point A,

$$\boxed{\sin i = n \sin r} \tag{1}$$

4. Comme l'indice de l'eau est supérieur à l'indice de l'air, on peut effectivement envisager une réflexion totale au point B.

5. D'après les lois de la réflexion, on a directement $\alpha = \beta$. De plus, commes les triangles OAB et OBC sont isocèles en O, les angles à la base sont égaux. Ainsi, $r = \alpha$ et $\gamma = \beta$, d'où l'égalité entre les quatre angles :

$$\boxed{\alpha = \beta = \gamma = r}$$

6. En choisissant des angles non orientés, on exprime les trois déviations :

$$D = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r)$$

car pour D_2 on a $\pi = D_2 + r + r$. Ainsi, on en déduit :

$$\boxed{D = \pi + 2i - 4r}$$

7. On dérive par rapport à i l'équation (1). On obtient :

$$\frac{d}{di}(\sin i = n \sin r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos i = n\frac{d}{di}(\sin r)$$

or, $\frac{d}{di}(\sin r) = \frac{dr}{di}\cos r$. Ainsi, on obtient la relation demandée :

$$\boxed{\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r(i)}} \tag{2}$$

8. $r(i)$ est directement donné par la formule (1) :

$$\boxed{r(i) = \arcsin \frac{\sin i}{n}} \tag{3}$$

9. Dérivons la formule de la déviation obtenue en Q6. On a :

$$\frac{dD}{di} = \frac{d}{di}(2i - 4r) = 2 - 4\frac{dr}{di}$$

Ainsi, on ré-exploite la formule (2) en égalisant $i = i_m$ (la dérivée est nulle dans ce cas) :

$$\frac{dD}{di}(i = i_m) = 2 - 4\frac{\cos i_m}{n \cos r(i_m)} = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\cos i_m}{n \cos \arcsin \frac{\sin i_m}{n}} = \frac{1}{2}}$$

10. En utilisant l'égalité donnée, on obtient :

$$\frac{\cos i_m}{n\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_m}{n^2}}} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\cos^2 i_m}{n^2(1 - \frac{\sin^2 i_m}{n^2})} = \frac{\cos^2 i_m}{n^2 - \sin^2 i_m} = \frac{1}{4}$$

soit

$$\cos^2 i_m = \frac{1}{4}(n^2 - \sin^2 i_m)$$

or, $\sin^2 i_m = 1 - \cos^2 i_m$. En factorisant par $\cos^2 i_m$, on obtient la formule demandée :

$$\boxed{\cos^2 i_m = \frac{n^2 - 1}{3}} \tag{4}$$

11. Ainsi, $D_m = D(i_m) = \pi - 2i_m - 4r(i_m)$. D'où

$$D_m = \pi + 2\arccos\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right) - 4\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2 i_m}}{n}\right)$$

Finalement, en utilisant la relation (4) pour remplacer l'argument de l'arcsinus, on obtient la relation demandée :

$$D_m = D(i_m) = 2\arccos\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right) - 4\arcsin\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}\right) + \pi$$

12. A.N : $\boxed{D_m = 138°}$.

13. Pour observer un arc-en-ciel, étant donné le phénomène de réflexion totale se produisant dans la goutte, il faut regarder dans la **direction opposée à celle du SoleiL**. De plus, l'arc en ciel est un arc car chaque couleur est déviée selon un angle fixe par rapport au soleil, donc d'un angle fixe par rapport au point antisolaire (point sur l'horizon dans la direction opposée à celle du soleil). Si on prend une succession de gouttes verticales parallèles à l'observateur, c'est la goutte du bas qui va lui envoyer la lumière bleue, puis celle du dessus la radiation verte (car celle-ci est moins déviée), puis celle encore au dessus lui enverra la radiation orange (encore moins déviée), etc.

Exercice n°2 : Optique de l'appareil photo

D'après CCINP 2021, filière MP

I. Objet et image

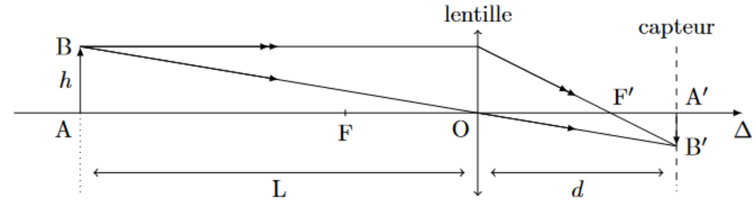
1. a) Dans les conditions de Gauss :

- ▷ les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique
- ▷ l'intersection des rayons avec le système optique se fait proche de l'axe optique

Lorsque les conditions de Gauss sont vérifiées, elles permettent **l'aplanétisme** (l'image d'un objet perpendiculaire à l'a.o est aussi perpendiculaire à ce dernier) et le **stigmatisme approché** d'un système optique (l'image d'un point est une tâche de faible dimension).

1. b) C'est le **diaphragme** qui permet de sélectionner les rayons proches de l'axe optique et ayant une incidence faible par rapport à ce dernier.

2. On représente la situation ci-dessous :



3. D'après la relation du grandissement, on a :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \quad \text{d'où} \quad \overline{A'B'} = \overline{AB}\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = h\frac{f'}{f'-L}$$

Or, $L \gg f'$ donc $\boxed{\overline{A'B'} \approx -\frac{hf'}{L} = -12{,}5 \text{ mm}}$

4. Par définition, l'image d'un objet à l'infini se forme au foyer image de la lentille convergente, on peut donc écrire :

$$\boxed{\text{d = f' = 50 mm}}$$

II. Objectifs

5. Faisons appel à la même expression qu'à la question 2.b) avec la nouvelle valeur de la distance focale pour trouver :

$$\boxed{\overline{A'B'} \approx \frac{-hf_1'}{L} = -25 \text{ mm}}$$

6. Le capteur a pour dimensions 24 mm × 36 mm et, d'après la question précédente, l'image de l'arbre a pour hauteur 25 mm sur le capteur. **Il est donc possible de voir l'arbre en entier sur le capteur si l'on prend la photo en mode portrait.**

7. Un téléobjectif est utilisé pour photographier les détails d'objets lointains, pour lesquels on a $L \gg f'$. Comme à la question 2.b, on considère que $L - f' \approx L$ dans l'expression de la taille de l'image sur le capteur :

$$\overline{A'B'} \approx -\frac{hf'}{L} = f'\alpha$$

où α est l'angle sous lequel on voit l'objet sans appareil photo. On constate que :

- ▷ L'image sur le capteur d'un objet lointain est d'autant plus grande que la focale est grande. Un téléobjectif ou "objectif à longue focale" permet donc d'obtenir une image de grande taille. Par exemple, un téléobjectif de 300 mm forme une image 6 fois plus grande qu'un objectif de 50 mm sur le capteur ;
- ▷ Le capteur étant de taille constante, l'augmentation de la taille de l'image peut entraîner le fait qu'elle ne peut plus être entièrement contenue dans le cadre du capteur : l'agrandissement s'accompagne d'une perte de champ latéral.

Ces deux facteurs contribuent à donner l'illusion que l'image obtenue a été prise proche de l'objet.

8. a) Calculons d'abord la distance $\overline{O_1A_1}$ du centre de (L_1) à l'image de l'arbre. D'après la première relation de conjugaison rappelée, on a :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'}$$

où $\overline{O_1A} = -L$, donc $\overline{O_1A_1} = \dfrac{f_1'L}{L - f_1'}$. Les données montrent que $f_1' \ll L$, donc on adopte l'approximation qui consiste à considérer l'arbre comme étant situé à l'infini :

$$\overline{O_1A_1} = f_1'$$

Comme $\overline{O_1O_2} = e$, on en déduit :

$$\boxed{\overline{O_2A_1} = \overline{O_1A_1} - \overline{O_1O_2} = f_1' - e}$$

8. b) D'après ce qui précède, l'image intermédiaire A_1B_1 doit être entre O_2 et F_2 pour que son image par L_2 soit réelle. Donc il faut que :

$$0 \leq \overline{O_2A_1} \leq |f_2'|$$

(on prend la valeur absolue car la lentille L_2 est divergente). On remplace l'expression de $\overline{O_2A_1}$ par celle obtenue précédemment :

$$0 \leq f_1' - e \leq |f_2'|$$

On multiplie par -1, ce qui change le signe de l'inégalité :

$$0 \geq e - f_1' \geq -|f_2'|$$

et on ajoute f_1' sur chaque membre :

$$f_1' \geq e \geq f_1' - |f_2'|$$

Finalement, il faut que e vérifie l'inégalité :

$$\boxed{f_1' - |f_2'| \leq e \leq f_1'}$$

8. c) Avec les données de l'énoncé, on a : $f_1' - |f_2'| = 5$ cm, $e = 8$ cm et $f_1' = 10$ cm, **la condition est donc bien satisfaite**.

9. a) A' est l'image de A_1 par la lentille L_2, on peut donc écrire la relation de conjugaison suivante :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f_2'} \quad \text{avec} \quad \overline{O_2A_1} = f_1' - e \quad \text{et} \quad \overline{O_2A'} = d$$

D'où $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{f_1' - e} + \dfrac{1}{f_2'} = \dfrac{f_2' + f_1' - e)}{f_2'(f_1' - e)}$

On en déduit :

$$\boxed{d = \frac{f_2'(f_1' - e)}{f_2' + f_1' - e} = 3,3 \text{ cm}}$$

9. b) $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \dfrac{d}{f_1' - e}$ donc $\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\dfrac{d}{f_1' - e}$

Il reste à trouver $\overline{A_1B_1}$: c'est le même calcul que pour la question 3. car c'est l'image de AB par la lentille L_1 :

$$\overline{A_1B_1} = -\frac{hf_1'}{L - f_1'} = 2,5 \text{ cm}$$

Finalement, on trouve :

$$\boxed{\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\frac{d}{f_1' - e} = 4,17 \text{ cm}}$$

9. c) L'image sur le capteur mesure 4,17 cm, alors qu'elle en mesurait 2,5 cm pour l'autre. **Ils ne sont donc pas équivalents.**