Exercice n°1 - Conditions initiales (★)

▷ Voir correction entraînement 4.10.

Exercice n°2 - S'entraîner à mettre en équation (★)

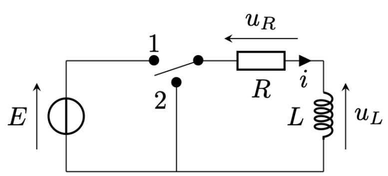
▷ Voir correction entraînement 4.13.

Exercice n°3 - S'entaîner à résoudre une E.D (★)

▷ Voir correction entraînement 4.14.

Exercice n°4 - Régime libre d'un circuit RL (★★)

1. On se sert des notations ci-dessous.



Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par i à $t > 0$, c'est-à-dire lorsque l'interrupteur est sur la position 2. D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_L = 0$$

En utilisant les lois de comportement (dipôles en convention récepteur),

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

D'où on en déduit :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} = 0,1 \text{ ms}}$$

2. Compte tenu de la valeur de τ, le régime permanent ne sera atteint ni au bout de 10μs, ni de 200μs (2τ n'est pas suffisant, il faut au moins 5τ). En revanche il le sera au bout de 20ms.

3. Forme générale des solutions : Cette équation différentielle est homogène. Ses solutions s'écrivent sous la forme

$$i(t) = Ae^{-t/\tau}$$

où A se détermine à partir des conditions initiales.

Condition initiale : Cherchons $i(0^+)$. À l'instant $t = 0^-$, l'interrupteur est en position 1 et le régime est permanent continu. Comme la bobine est équivalente à un fil, le circuit est équivalent à une résistance R branchée au générateur de f.é.m. E. D'après la loi d'Ohm, le courant dans le circuit vaut

$$i(0^-) = \frac{E}{R}$$

Comme le courant dans une bobine doit être continu, on en déduit $i(0^+) = E/R$ également.

Détermination de la constante d'intégration : D'après la forme générale de la solution, $i(0^+) = Ae^{-t/\tau}$, et par identification avec la condition initiale on déduit $A = E/R$. Finalement,

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}}$$

4. À l'instant initial, $i = E/R$, et l'énergie stockée dans la bobine vaut

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\frac{E^2}{R^2}$$

À l'instant final, $i = 0$ (se voit ou bien en considérant le circuit équivalent en régime permanent, ou bien en prenant la solution dans la limite $t \to \infty$), donc

$$\Delta E_L = E_L(\infty) - E_L(0) = -\frac{L}{2}\frac{E^2}{R^2}$$

L'énergie dissipée dans la résistance entre $t = 0$ et la fin de l'évolution vaut

$$E_J = \int_0^\infty P_J(t)dt = \int_0^\infty Ri^2 dt$$

où P_J est la puissance dissipée par effet Joule à l'instant t. En utilisant l'expression de $i(t)$ établie précédemment,

$$E_J = \int_0^\infty R\frac{E^2}{R^2}e^{-2t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right] = \frac{E^2\tau}{2R}$$

Comme $\tau = \dfrac{L}{R}$, on en déduit

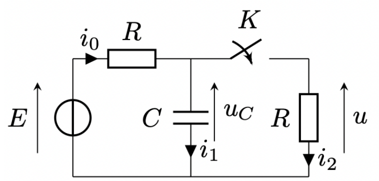
$$E_J = \frac{LE^2}{2R^2} = -\Delta E_L$$

Ce bilan traduit bien que **l'énergie libérée par la bobine est dissipée par effet Joule dans la résistance.**

Exercice n°5 - Circuit RC à deux mailles (★★)

• Mise en équation

Commençons par établir l'équation différentielle vérifiée par u pour $t > 0$, où l'interrupteur est fermé. Comme le circuit compte deux mailles, il faudra utiliser deux lois de Kirchoff, mais l'ordre dans lequel on les utilise importe peu.



D'après la loi des mailles et la loi d'Ohm,

$$E = Ri_0 + u$$

D'après la loi des nœuds,

$$i_0 = i_1 + i_2 = i_0 + \frac{u}{R}$$

Ainsi, en reprenant la loi des mailles :

$$E = (Ri_1 + u) + u$$

En utilisant la loi de comportement du condensateur et le fait qu'à $t > 0$, $u_C = u$ on en déduit l'équation différentielle vérifiée par u pour $t > 0$:

$$E = RC\frac{du}{dt} + 2u \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{2}{RC}u = \frac{E}{RC} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{2}}$$

• Forme générale des solutions

La forme générale d'une solution de cette équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Toute solution de l'équation homogène s'écrit sous la forme

$$u_H(t) = A\exp -\frac{t}{\tau}$$

avec A une constante. Pour trouver une solution particulière, on annule la dérivée première dans l'E.D, ce qui permet de trouver

$$u_p = \frac{E}{2}$$

Ainsi, la solution complète s'écrit :

$$u = A\exp -\frac{t}{\tau} + \frac{E}{2}$$

• Détermination de la condition initiale

Comme, pour $t > 0$, $u_C = u$ alors à l'instant initial $u(0^+) = u_C(0^+)$. Par conséquent, $u(0^+) = u_C(0^-)$ car la tension aux bornes d'un condensateur est continue. Mais attention : $u(0^+) \neq u(0^-)$ car la tension aux bornes d'un interrupteur ouvert n'est pas nulle !

Déterminons donc $u_C(0^-)$. Remarquons pour cela qu'à $t < 0$, $i_1 = 0$ (condensateur équivalent à un interrupteur ouvert) et $i_2 = 0$ (vrai interrupteur ouvert), et donc d'après la loi des nœuds : $i_0 = i_1 + i_2 = 0$. La loi des mailles s'écrit alors à $t = 0^-$:

$$E = u_R(0^-) + u_c(0^-)$$

Finalement, on en déduit la condition initiale cherchée,

$$\boxed{u(0^+) = E}$$

• Détermination de la constante d'intégration

Attention ! Une erreur classique consiste à oublier la solution particulière dans la détermination de A. Rappelons donc que les conditions initiales se déterminent sur la solution complète. Ici,

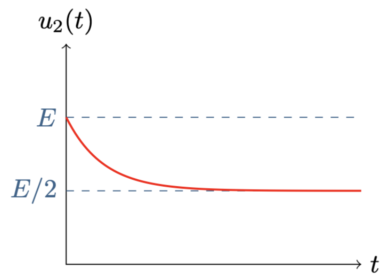
$$u(0) = A + \frac{E}{2} = E \quad \text{d'où} \quad A = \frac{E}{2}$$

• Conclusion

On en déduit ainsi la solution complète :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 + \exp -\frac{t}{\tau}\right)}$$

La représentation graphique de $u_2(t)$ est donnée ci-dessous.



Exercice n°6 - Circuit RL à deux mailles (★★)

1. Valeurs asymptotiques : $u_2(\infty) = 0$ (bobine = fil de connexion) et $u_1(\infty) = E$ par loi des mailles.

2. Le circuit compte deux mailles, il faut donc a priori exploiter deux lois de Kirchoff. La loi des mailles donne

$$E = u_1 + u_2$$

alors que la loi des nœuds donne avec les notations de la question précédente

$$i_1 = i_2 + i_L$$

L'équation différentielle doit porter sur u_2 : il faut donc exprimer u_1 en fonction de u_2 puis injecter le résultat dans la loi des mailles. D'après la loi d'Ohm puis en utilisant la loi des nœuds,

$$u_1 = R_1 i_1 = R_1(i_2 + i_L)$$

Cherchons maintenant à exprimer i_2 et i_L en fonction de u_2 par des lois de comportement. Comme celle d'une bobine implique la dérivée du courant la traversant, on dérive l'expression trouvée pour u_1 avant d'utiliser les lois de comportement, d'où

$$\frac{du_1}{dt} = R_1\left(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_L}{dt}\right) = R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L}u_2\right)$$

Comme ce résutat implique du_1/dt, il faut à dériver la loi des mailles par rapport au temps avant de l'y injecter, d'où

$$0 = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} = R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L}u_2\right) + \frac{du_2}{dt}$$

L'équation différentielle s'écrit finalement :

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{du_2}{dt} + \frac{R_1}{L}u_2 = 0$$

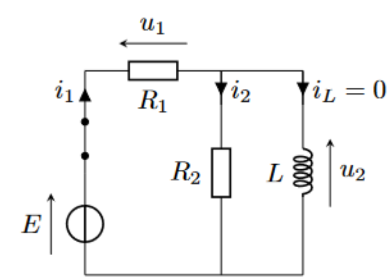
soit, en l'écrivant sous forme canonique

$$\boxed{\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{\tau}u_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = L\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

Remarque : On vérifie bien que le temps caractéristique est homogène à une inductance sur une résistance.

3. $u_1(0^-) = 0$ et $u_2(0^-) = 0$. De plus, d'après le schéma ci-dessous équivalent en 0^+, on a :

$$E = R_1 i_1 + R_2 i_2 \quad \text{d'où} \quad i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

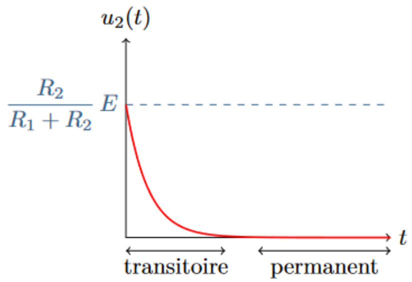


On en déduit donc, d'après la loi d'Ohm :

$$\boxed{u_1(0^+) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}E \quad \text{et} \quad u_2(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E}$$

4. $\boxed{u_2(t) = \dfrac{R_2}{R_2 + R_1}E\exp -\dfrac{t}{\tau}}$

5. La figure est donnée ci-dessous.



6. On cherche t_{10} tel que $u(t_{10}) = u_2(0^+)/10$. On trouve :

$$\boxed{t_{10} = \tau \ln(10)}$$

7. On trouve :

$$\boxed{L \approx 0,43H}$$