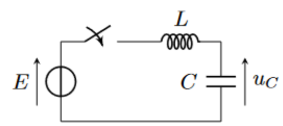
Pour bien démarrer

Exercice n°1 - S'entraîner à résoudre une E.D (★)

1. Résoudre $\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2(u_c - E) = 0$, avec $u_c(0) = 0$ et $\dfrac{du_c}{dt}(0) = 0$.
2. Résoudre $\dfrac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$, avec $i(0) = 0$ et $\dfrac{di}{dt}(0) = E/L$.

Exercice n°2 - Oscillateur harmonique électrique (★)

Cet exercice récapitule le début du paragraphe II du cours.

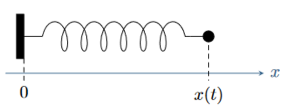


On considère le circuit électrique LC ci-contre, où l'interrupteur est fermé à $t = 0$. Le condensateur est initialement déchargé.

▷ Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C après la fermeture de l'interrupteur. L'écrire sous forme canonique et identifier la pulsation propre ω_0 du circuit. Attention à la solution particulière !

Exercice n°3 - Oscillateur harmonique mécanique (★)

Cet exercice récapitule le début du paragraphe III du cours.



On considère un l'oscillateur masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le solide est lâché d'une position x_0 sans vitesse initiale.

▷ Établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

Exercices essentiels (traités en TD)

Exercice n°4 - Oscillateur masse-ressort vertical (★★)

L'oscillateur de démonstration est modélisé par un ressort de longueur naturelle l_0 et de raideur k. Ce ressort est attaché à une ficelle en un point O supposé fixe et pend verticalement. Un cylindre de masse m est fixée à son autre extrémité. La position du cylindre est repérée par sa cote z, définie le long d'un axe (Oz) orienté vers le bas et dont l'origine est fixée au point d'attache du ressort.

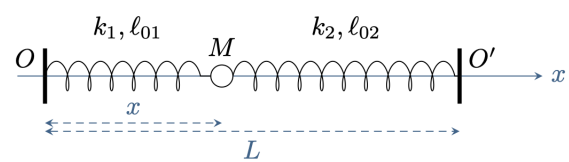
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et l'écrire sous forme canonique. En déduire la période des oscillations et comparer au cas horizontal.
2. Déterminer la position d'équilibre $z_{éq}$. Commenter physiquement le résultat.
3. Le cylindre est lâché sans vitesse initiale à partir d'une position z_0 obtenue en étirant le ressort par rapport à la position d'équilibre. Déterminer la loi horaire $z_(t)$.
4. L'énergie potentielle du cylindre peut s'écrire sous la forme :

$$E_p(z) = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 - mgz$$

Que représentent chacun des termes ? Montrer que la solution générale obtenue traduit bien la conservation de l'énergie mécanique du cylindre.

Exercice n°5 - Une masse et deux ressorts (★★)

Considérons un point matériel M de masse m glissant horizontalement et sans frottement, repéré par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x}$. Ce solide est relié à deux ressorts placés sur un même axe, eux-mêmes fixés en O et O'. Le solide étudié se trouve entre O et O'. La longueur OO' est notée L. Les ressorts ont pour raideur respective k_1 et k_2, et pour longueur à vide l_{01} et l_{02}.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ appelée équation du mouvement.
2. Montrer que la position d'équilibre est donnée par

$$x_{\text{éq}} = \frac{k_1 l_{01} + k_2(L - l_{02})}{k_1 + k_2}$$

3. En déduire la forme générale des solutions de l'équation du mouvement.
4. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, M est placé en $x = x_0 > x_{\text{éq}}$ et lancé avec une vitesse initiale v_0 vers la gauche. Établir la loi horaire $x(t)$ et représenter son allure.
5. Supposons maintenant $x_0 = x_{\text{éq}}$ et $v_0 = 0$. Que vérifie-t-on ?

Pour aller plus loin

Exercice n°6 - Vibration d'une molécule de HCl (★★★)

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est mesurée par spectroscopie comme valant $f = 8,5 \cdot 10^{13}$ Hz. On aborde dans cet exercice un premier modèle simple de la molécule, décrite comme un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe. L'interaction entre les deux atomes est modélisée par un pseudo-ressort de raideur k.

Données : masses molaires $M_H = 1,0$ g·mol^{-1} et $M_{Cl} = 35,5$ g·mol^{-1}, nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

1. Pourquoi est-il raisonnable de supposer l'atome de chlore fixe ?
2. Calculer la raideur k.
3. On admet que l'énergie de la molécule E s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} h f \quad \text{avec} \quad h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

   Calculer la vitesse maximale de l'atome d'hydrogène.
4. Calculer l'amplitude de son mouvement

Éléments de réponse

Exercice n°1

1. $u_c(t) = E(1 - \cos\omega_0 t)$ 2. $i(t) = \dfrac{E}{L\omega_0}\sin\omega_0 t$

Exercice n°2

▷ Voir paragraphe II du cours.

Exercice n°3

▷ Voir paragraphe III du cours.

Exercice n°4

1. $\dfrac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = g + \dfrac{kl_0}{m}$ 2. $z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$ 3. $z(t) = z_{\text{éq}} + (z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t)$
4. $E_m = \dfrac{1}{2}k(z_0 - l_0)^2 - mgz_0 = \text{cste}$.

Exercice n°5

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \dfrac{k_1 l_{01} + k_2(L - l_{02})}{m}$
3. $x(t) = x_{\text{éq}} + (x_0 - x_{\text{éq}})\cos\omega_0 t + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

Exercice n°6

1. $m_{\text{Cl}} > m_{\text{H}}$: le chlore est donc plus difficile à mettre en mouvement.
2. $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_{\text{H}}}}$ donc $k = \dfrac{4\pi^2 f^2 M_{\text{H}}}{\mathcal{N}_A} = 4,7 \times 10^2$ N/m.
3. $\dfrac{1}{2}hf = \dfrac{1}{2}m_{\text{H}} v_{\max}^2$ donc $v_{\max} = \sqrt{\dfrac{hf\mathcal{N}_A}{M_{\text{H}}}} = 5,8 \times 10^3$ m/s.
4. $X_{\max} = \sqrt{\dfrac{h\mathcal{N}_A}{4\pi^2 f M_{\text{H}}}} = 11$ pm.