Informations

• Ce devoir est **facultatif**. Si vous le souhaitez, vous pouvez me le rendre le **Mardi 7 Novembre**. Je vous conseille d'y consacrer **3 heures** en conditions réelles.

• **Ceinture bleue** : exercice n°1, Q1 à Q6 + exercice n°3, Q15 à Q19.

• **Ceinture noire** : l'intégralité du devoir.

Rappel : la poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide subit une force de la part de ce fluide appelée *poussée d'Archimède*, notée $\vec{\Pi}$, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- ▷ Direction : verticale
- ▷ Sens : dirigée vers le haut (opposée au poids)
- ▷ Intensité : égale à l'intensité du poids du fluide déplacé, soit :

$$\vec{\Pi} = -\rho_f.V.\vec{g}$$

où ρ_f désigne la masse volumique du fluide, et V le volume du corps étudié.

Exercice n°1 : Champagne !

Adapté du Concours Général des Lycées

L'objectif de l'exercice est d'étudier la remontée des bulles dans le champagne, liquide de masse volumique ρ_l. Les bulles sont constituées de CO_2 à la pression $p = 1$ bar. La force $\vec{f}$ exercée par le champagne sur la bulle est modélisée par la relation de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

où η est la viscosité du champagne, r le rayon de la bulle et $\vec{v}$ la vitesse de la bulle. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, auquel on adjoint un repère d'espace (O, $\vec{e_z}$) vertical vers le haut.

1. Montrer que le poids de la bulle est négligeable devant sa poussée d'Archimède. En déduire les deux seules forces agissant sur la bulle.

Dans la suite, on négligera le poids de la bulle dans le bilan des forces.

2. En appliquant la deuxième loi de Newton à la bulle, établir l'équation différentielle vérifiée par la composante v_z de la vitesse de la bulle sur l'axe z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau}v_z = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

où l'on exprimera les paramètres v_{lim} et τ en fonction des masses volumiques ρ_l et ρ_g (masse volumique du gaz), et de η, g et r.

3. On considère qu'à sa formation, la bulle est sans vitesse. Résoudre l'équation différentielle obtenue précédemment.

4. Représenter l'allure de v_z au cours du temps. Distinguer graphiquement le régime transitoire du régime permanent.

5. Indiquer v_{lim} et τ sur la courbe et donner leur interprétation physique.

6. Calculer numériquement τ. Quelle approximation peut-on effectuer sur l'expression de v_z ?

L'émission des bulles se fait la plupart du temps de manière périodique, ce qui rend l'étude plus aisée. La méthode expérimentale utilisée par Gérard Liger-Belair et son équipe du laboratoire d'Œnologie de Reims est présentée ci-dessous. Ils ont photographié un train de bulles dans une flûte de champagne à un instant donné en se servant d'un appareil photographique dont l'ouverture du diaphragme est synchronisée avec le flash d'un stroboscope qui émet des éclairs régulièrement espacés à la fréquence f_b. Un écran diffusant est interposé entre le verre et le flash afin d'homogénéiser la lumière. Les distances sont étalonnées à l'aide d'un papier millimétré collé à la surface du verre. Un schéma du dispositif et un exemple de cliché obtenu est représenté figure 1.

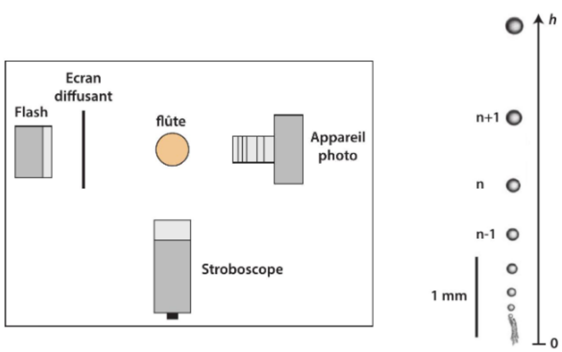

Figure 1 – Dispositif expérimental pour l'étude de la remontée des bulles de champagne.

7. Expliquer en quoi un choix judicieux de la fréquence f_b permet d'avoir accès, en un seul cliché, à une succession de positions occupées par une bulle.

8. Le cliché précédent a été pris avec $f_b = 20$ Hz. Justifier que la vitesse v_n d'une bulle indicée n peut être évaluée par :

$$v_n = f_b \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2}$$

où h_{n+1} et h_{n-1} représentent respectivement les altitudes des bulles indicées n+1 et n-1. Effectuer l'application numérique pour la bulle indicée n sur la figure 1.

9. L'allure des positions des bulles sur la photographie est-elle en accord avec l'hypothèse formulée question 6 ? Expliquer.

On peut également mesurer le rayon de chaque bulle, ce qui permet finalement de tracer la vitesse en fonction du rayon, comme représenté figure 2.

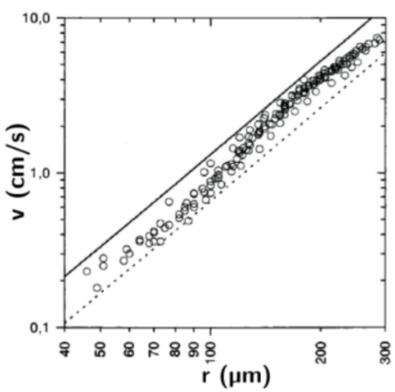

Figure 2 – **Vitesse de remontée de la bulle en fonction du rayon.**

10. Montrer que la vitesse limite v_{lim} obéit à l'équation :

$$\log v_{lim} = A + 2 \log r$$

où log désigne la fonction logarithme décimal et A une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème.

11. Justifier que cette expression est cohérente avec la figure 2.

Exercice n°2 : Oscillations d'un cube dans l'eau

Un cube de côté a, de masse volumique ρ_c, flotte en équilibre dans un liquide de masse volumique ρ_l ($\rho_l > \rho_c$). Les conditions sont telles que le cube ne bascule pas, gardant toujours sa face inférieure horizontale. On ne prend pas en compte la pression de l'air, ni les frottements visqueux avec le fluide. On choisit un repère (O, $\vec{k}$) dont l'origine se situe au niveau de la base du cube lorsqu'il est à l'équilibre dans le fluide, et $\vec{k}$ dirigé vers le bas. A l'instant $t = 0$ on enfonce le cube dans le fluide (hauteur de cube immergée h_0) et on le lâche sans vitesse initiale.

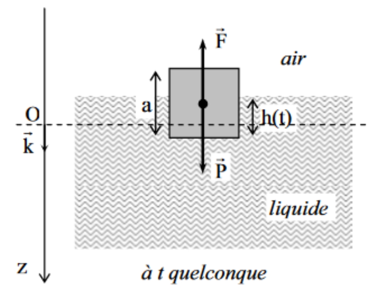

Figure 1: Schéma et notations pour les oscillations du cube

12. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $z(t)$ dans le cas où $h_0 < a$. Montrer que la période des oscillations s'écrit :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a\rho_c}{g\rho_l}}$$

13. En déduire $z(t)$.

14. Quelle doit être la valeur de h_0 pour que le cube puisse bondir hors du liquide ?

Exercice n°3 : Suspension d'un véhicule

Adapté de CCP 2013 (filière TSI)

On considère un véhicule de masse m. Le système de suspension de ce véhicule peut être représenté par l'association d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0, et d'un amortisseur provoquant une force de frottement de type fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

15. Faire trois schémas : l'un pour le système à vide à l'équilibre, l'un pour le système à l'équilibre et le troisième pour le système à un temps quelconque.
16. On néglige le poids du système de suspension et des roues. Déterminer la relation entre la longueur à vide et la longueur d'équilibre du ressort.
17. Établir l'équation différentielle du mouvement vertical du véhicule lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre.
18. Déterminer le coefficient d'amortissement λ pour que le régime soit critique.
19. L'usure des amortisseurs due au temps entraîne une diminution du coefficient d'amortissement λ d'un cinquième de sa valeur initiale :

$$\lambda' = \lambda\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

    Qualifier le régime d'amortissement dans ce cas.
20. Un trou dans la chaussée écarte le ressort de sa position d'équilibre d'une longueur h_0. En considérant que la vitesse verticale est nulle en h_0, résoudre l'équation différentielle régissant l'évolution du mouvement vertical du véhicule.
21. Déterminer le temps nécessaire pour que les oscillations deviennent négligeables.

Données : $m = 800$ kg ; $k = 31000$ N/m ; $l_0 = 50$ cm. On considérera les oscillation du véhicule négligeables lorsque leur amplitude sera divisée par un facteur e^{10}.