Vrai / Faux

1. La solution particulière d'un système du second ordre est aussi la solution en régime permanent.

Vrai ❐ Faux ❐

2. Lorsque le facteur de qualité est supérieur à 1/2, le régime d'évolution est pseudo-périodique.

Vrai ❐ Faux ❐

3. Plus le facteur de qualité est grand et plus la décroissance de l'amplitude des oscillations est rapide.

Vrai ❐ Faux ❐

4. L'oscillateur harmonique est le cas limite où Q tend vers 0.

Vrai ❐ Faux ❐

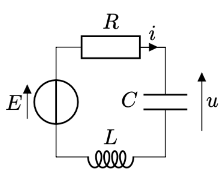
5. Lors d'un régime pseudo périodique, la pulsation des oscillations est la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur harmonique.

Vrai ❐ Faux ❐

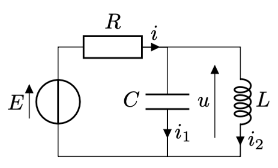
Pour bien démarrer

Exercice n°1 - Mise en équation (★)

On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



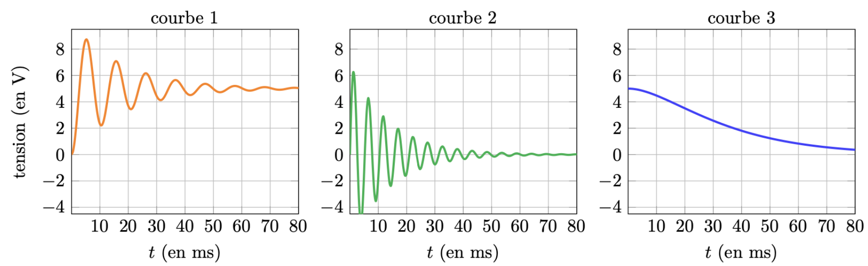
montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u dans les deux montages ci-dessus.

Exercice n°2 - Réponses d'un circuit du second ordre (★)

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps. Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \text{cste}$$



1. Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?
2. On a :

$$u_1(t) = ae^{-t/\tau_1} - bae^{-t/\tau_2}$$

Quelle est la courbe correspondante ?

3. On a :

$$u_2(t) = E\sin(\Omega t)e^{-t/\tau}$$

Quelle est la courbe correspondante ?

4. On a :

$$u_3(t) = E\left[1 - (\cos(\Omega' t) + a\sin(\Omega' t))e^{-t/\tau'}\right]$$

Quelle est la courbe correspondante ?

5. Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$.

Exercice n°3 - Résolution complète du circuit RLC série (★)

L'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur du montage 1 de l'exercice n°1 s'écrit :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

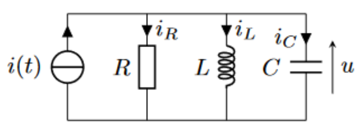
On rappelle que $e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = E$ pour $t > 0$. Aucun courant ne circule à $t < 0$.

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle dans le cas où $Q = 1$.
2. Exprimer les conditions initiales sous une forme appropriée.
3. En déduire la solution $u(t)$.
4. Représenter et légender la courbe $u(t)$.

Exercices essentiels (traités en TD)

Exercice n°4 - Circuit RLC parallèle (★★)

On considère le circuit ci-dessous. À l'instant $t = 0$, le générateur de courant impose que $i(t)$ passe de 0 à $\eta = 10$ mA. Les composants sont choisis tels que $R = 50\ \Omega$, $C = 400$ nF et $L = 10$ mH.



1. Établir l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ dans ce circuit à $t > 0$.
2. Mettre cette équation sous forme canonique et donner l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction de R, L et C.
3. Quel est le type d'évolution de u ?
4. Justifier qu'à l'instant $t = 0$, $i_L = 0$ et $u = 0$.
5. En déduire l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.

Exercice n°5 - Viscosimètre oscillant (★★)

Une bille de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur naturelle l_0. Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité η, la bille est soumise à une force de frottement $\vec{f}$ donnée par la formule de Stokes

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

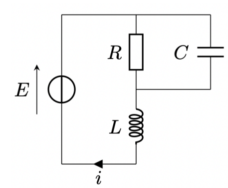
où $\vec{v}$ est la vitesse de la sphère dans le liquide. On néglige la poussée d'Archimède.

1. Établir l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période T des oscillations.
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est T_0. Déterminer le coefficient de viscosité η du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

Pour aller plus loin

Exercice n°6 - Encore un RLC ! (★★★)

Considérons le circuit représenté ci-dessous, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.
2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.
3. Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.
4. Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.
5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Éléments de réponse

Vrai / Faux

1. Vrai 2. Vrai 3. Faux 4. Faux 5. Faux

Exercice n°1

Montage 1 : $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}$

Montage 2 : $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$

Exercice n°2

1. Courbe 2 2. Courbe 3 3. Courbe 2 4. Courbe 1
5. $1,2 \times 10^{-3}$ rad.

Exercice n°3

▷ Voir paragraphe II du cours.

Exercice n°4

1. $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$ 2. Q $= R\sqrt{\frac{C}{L}}$
3. $Q = 0,3$: régime apériodique. 4. $u(0^+) = 0$ et $i_L(0^+) = 0$
5. $u(t) = \frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\eta}{C}\left(e^{r_1 t} + e^{r_2 t}\right)$ avec $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)$

Exercice n°5

1. $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{6\pi\eta r}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0$ donc $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi m}{\sqrt{km - (3\pi\eta r)^2}}$
2. $\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$ avec $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Exercice n°6

2. $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{E}{RLC}$ donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$
4. $i(0^+) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$
5. $i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\left[\cos(\omega_p t) + \frac{R}{\omega_p}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)\sin(\omega_p t)\right]e^{-\mu t}$

avec $\omega_p = \frac{\omega_0}{4}\sqrt{15}$ et $\mu = \frac{\omega_0}{4}$