Exercice n°1 - S'entraîner à résoudre une E.D (★)

▷ Voir correction entraînement 4.18.

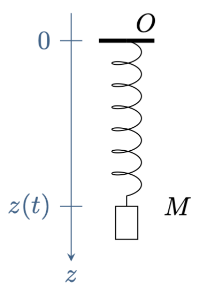
Exercice n°2 - Oscillateur harmonique électrique (★)

▷ Voir paragraphe II du cours. Il faut simplement ici ajouter une solution particulière !

Exercice n°3 - Oscillateur harmonique mécanique (★)

▷ Voir paragraphe III du cours.

Exercice n°4 - Oscillateur masse-ressort vertical (★★)



1. Avant d'appliquer la deuxième loi de Newton, il convient d'expliciter le système, le référentiel d'étude ainsi que les forces qui s'exercent sur le système.

▷ Système : le cylindre de masse m ;

▷ Référentiel : terrestre, considéré galiléen ;

▷ Bilan des forces :

⇝ le poids $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{e_z}$

⇝ la force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F} = -k(z - l_0)\overrightarrow{e_z}$

La deuxième loi de Newton appliquée au système s'écrit alors :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}$$

En projetant selon $\overrightarrow{e_z}$ pour obtenir une équation scalaire, on a :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - k(z - l_0)$$

soit

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + kz = mg + kl_0$$

L'équation différentielle se réécrit alors sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 l_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

2. La position d'équilibre $z_{\text{éq}}$ correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Ainsi,

$$\frac{k}{m}z_{\text{éq}} = g + \frac{k}{m}l_0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{z_{\text{éq}} = l_0 + \frac{mg}{k}}$$

On remarque que la position d'équilibre est plus grande que l_0 (position d'équilibre de l'oscillateur horizontal) : c'est normal, puisqu'ici le poids de la masse l'attire vers le bas au repos. De plus, on remarque que $z_{\text{éq}} \propto m$: plus la masse est grande, plus la longueur à l'équilibre est grande, ce qui est cohérent physiquement.

3. La solution $z(t)$ s'écrit :

$$z(t) = z_{\text{éq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Les constantes A et B se trouvent à partir des conditions initiales,

$$z(0) = z_0 = z_{\text{éq}} + A \quad \text{donc} \quad A = z_0 - z_{\text{éq}}$$

De plus,

$$\frac{dz}{dt}(0) = v(0) = 0 = B\omega_0 \quad \text{donc} \quad B = 0$$

Finalement, la solution complète s'écrit :

$$\boxed{z(t) = z_{\text{éq}} + (z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t)}$$

4. Le premier terme en $\frac{1}{2}k(z - l_0)^2$ est l'énergie potentielle élastique que le ressort est à même de fournir au solide. Le second terme en $-mgz$ est l'énergie potentielle de pesanteur du solide.

Commençons par calculer l'énergie potentielle élastique,

$$E_{pe} = \frac{1}{2}[z_{\text{éq}} + (z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) - l_0]^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{mg}{k} + (z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t)\right]$$

$$= \frac{m^2g^2}{2k} + mg(z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k(z_0 - z_{\text{éq}})^2\cos^2(\omega_0 t)$$

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{pp} = -mgz = -mg(z_0 - z_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t)$$

L'énergie cinétique se déduit à partir de la vitesse :

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega_0^2(z_0 - z_{\text{éq}})^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Finalement, en simplifiant déjà le terme en $\cos(\omega_0 t)$,

$$E_m = \frac{m^2g^2}{2k} + \frac{1}{2}k(z_0 - z_{éq})^2\cos^2(\omega_0 t) - mgz_{éq} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(z_0 - z_{éq})^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Comme $\omega_0^2 = k/m$ alors $m\omega_0^2 = k$, ce qui permet de factoriser et d'utiliser $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$. Ainsi,

$$E_m = \frac{m^2g^2}{2k} - mgz_{éq} + \frac{1}{2}k(z_0 - z_{éq})^2$$

On montre bien ici que l'énergie mécanique est constante.

Exercice n°5 - Oscillateur masse-ressort vertical (★★)

1. ▷ Système : le solide de masse m, repéré par la position du point M ;

▷ Référentiel : terrestre, que l'on considère en bonne approximation galiléen ;

▷ Bilan des forces :

⇝ son poids, vertical, est supposé exactement compensé par la réaction du support sur lequel il se trouve ;

⇝ la force de rappel exercée par le ressort 1 : $\overrightarrow{F_1} = -k_1(x - l_{01})\overrightarrow{e_x}$

⇝ la force de rappel exercée par le ressort 1 : $\overrightarrow{F_2} = k_2(L - x - l_{02})\overrightarrow{e_x}$

En appliquant la deuxième loi de Newton au système et en projetant directement selon $\overrightarrow{e_x}$, on obtient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 \quad \text{soit} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1(x - l_{01}) + k_2(L - x - l_{02})$$

Ainsi,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k_1 x + k_2 x = k_1 l_{01} + k_2(L - l_{02})$$

L'équation différentielle sous forme canonique s'écrit alors :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = \frac{k_1 l_{01} + k_2(L - l_{02})}{m}$$

On identifie ainsi la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}$.

2. La position d'équilibre du solide est donnée par une solution particulière constante de l'équation différentielle. Pour $x = x_{éq} = \text{cste}$, elle s'écrit

$$0 + \omega_0^2 x_{éq} = \frac{k_1 l_{01} + k_2(L - l_{02})}{m} \quad \text{soit} \quad x_{éq} = \frac{k_1 l_{01} + k_2(L - l_{02})}{m\omega_0^2}$$

Ainsi,

$$\boxed{x_{éq} = \frac{k_1 l_{01} + k_2(L - l_{02})}{k_1 + k_2}}$$

3. Les solutions de l'équation du mouvement s'écrivent toutes sous la forme d'une somme d'une solution particulière, en l'occurence $x = x_{éq}$, et d'une solution de l'équation homogène, d'où

$$\boxed{x(t) = x_{éq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

4. D'après la première condition initiale,

$$x(0) = x_0 = x_{éq} + A \quad \text{d'où} \quad A = x_0 - x_{éq}$$

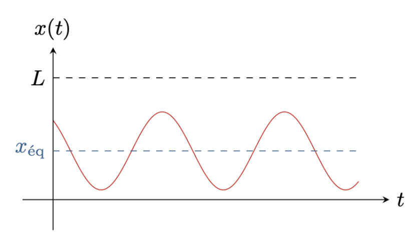
Pour utiliser la seconde condition initiale, il faut connaître la vitesse. Ainsi, comme le solide est lancé vers la gauche $v_x(0) = -v_0$, donc

$$v_x(0) = -v_0 = B\omega_0 \quad \text{d'où} \quad B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

La solution complète s'écrit ainsi :

$$\boxed{x(t) = x_{éq} + (x_0 - x_{éq})\cos(\omega_0 t) - \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

L'allure est représentée ci-dessous. Points importants du tracé : oscillations symétriques par rapport à la position d'équilibre $x_{éq}$, qui restent bornées entre 0 et L. Les conditions initiales doivent apparaître clairement : $x(0) > x_{éq}$ et la pente initiale doit être négative car le solide est lancé vers la gauche.



5. Avec ces nouvelles conditions initiales, la résolution reste formellement la même mais donne

$$A = B = 0 \quad \text{donc} \quad x(t) = x_{\text{éq}}, \forall t$$

On vérifie ainsi que $x_{\text{éq}}$ est bien une **position d'équilibre du système**.

Exercice n°6 - Vibration d'une molécule de HCl (★★)

1. Au vu des masses molaires, l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que l'atome d'hydrogène, et donc beaucoup plus difficile à mettre en mouvement. Il est donc raisonnable de supposer que seul l'atome d'hydrogène est en mouvement.

2. Le système est équivalent à un mobile (l'atome H) relié à un support fixe (l'atome Cl) par un ressort, c'est-à-dire un oscillateur harmonique. Sa fréquence propre f est alors reliée à la masse $m_{\mathrm{H}} = M_H/\mathcal{N}_A$ de l'atome H et à la raideur k du ressort par

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{H}}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k\mathcal{N}_A}{M_{\mathrm{H}}}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{k = \frac{4\pi^2 f^2 M_{\mathrm{H}}}{\mathcal{N}_A} = 4,7 \times 10^2 \text{ N/m}}$$

▷ Attention pour calculer la valeur numérique à bien convertir la masse molaire en kg·mol^{-1} !

3. La vitesse de l'atome d'hydrogène est maximale lorsque celui-ci passe par sa position moyenne, correspondant à la longueur naturelle du pseudo-ressort car aucune autre force n'est envisagée. À ces points particuliers, l'énergie mécanique de l'atome d'hydrogène est sous forme seulement d'énergie cinétique, $E_m = E_c = \dfrac{1}{2} m_{\mathrm{H}} v_{\max}^2$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}m_{\mathrm{H}} v_{\max}^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{hf\mathcal{N}_A}{M_{\mathrm{H}}}} = 5,8 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

4. La position de l'atome est égale à l'amplitude $X_{\max}$ de son mouvement aux points de rebroussement. À ces points particuliers, l'énergie mécanique E_m de l'atome d'hydrogène est sous forme seulement d'énergie potentielle,

$$\frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}kX_{\max}^2 = \frac{1}{2}\frac{4\pi^2 f^2 M_{\mathrm{H}}}{\mathcal{N}_A}X_{\max}^2$$

Ainsi,

$$\boxed{X_{\max} = \sqrt{\frac{h\mathcal{N}_A}{4\pi^2 f M_{\mathrm{H}}}} = 11 \text{ pm}}$$