Exercice n°1 - Mise en équation (★)

▷ Voir correction entraînement 4.17.

Exercice n°2 - Réponses d'un circuit du deuxième ordre (★)

▷ Voir correction entraînement 4.19.

Exercice n°3 - Résolution complète du circuit RLC série (★)

▷ Voir paragraphe IV du cours, dans le cas d'un régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$).

Exercice n°4 - Circuit RLC parallèle (★★)

1. Comme toutes les branches du circuit ne comptent qu'un dipôle, la loi des mailles n'apporte rien dans un premier temps. Commençons par la loi des nœuds, écrite à $t > 0$ où $i(t) = \eta$,

$$\eta = i_R + i_L + i_C$$

Puis, d'après les lois de comportement,

$$\eta = \frac{u}{R} + i_L + C\frac{du}{dt}$$

Pour pouvoir insérer la loi de comportement de la bobine, il est nécessaire de dériver la relation issue de la loi des nœuds, d'où

$$0 = \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + \frac{di_L}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{0 = \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}u + C\frac{d^2u}{dt^2}}$$

2. Ecrivons cette équation sous forme canonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

ce qui permet d'identifier la pulsation propre, donnée par

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Remarque : l'identification commence toujours avec la pulsation propre.

ainsi que le facteur de qualité, défini par

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Remarquons que le facteur de qualité de ce circuit est l'inverse de celui du RLC série, ce qui peut se comprendre qualitativment. D'une part, le facteur de qualité est sans dimension ce qui ne laisse dimensionnellement que deux possibilités. D'autre part, un circuit avec un grand facteur de qualité se rapproche d'un oscillateur harmonique, c'est-à-dire d'un circuit LC sans résistance. Dans le cas du circuit RLC parallèle, cette limite du circuit LC s'obtient avec R infinie.

3. Numériquement, le facteur de qualité vaut $Q = 0,3 < 1/2$: l'évolution de u est donc **apériodique**.

4. Comme le courant i_L est celui traversant une bobine et comme la tension u est celle aux bornes d'un condensateur, alors ces deux quantités sont continues. Déterminons leur valeur à $t = 0^-$, où le circuit est en régime permanent continu, sans forçage par le générateur de courant (il impose $i = 0$). Comme la bobine est équivalente à un fil, alors la tension à ses bornes est nulle donc

$$\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$$

On en déduit que la résistance est soumise à une tension nulle, donc $i_R(0^-) = 0$, et comme le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert alors $i_C(0^-) = 0$. D'après la loi des nœuds et la continuité,

$$\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0}$$

5. • Forme générale des solutions

▷ Comme l'équation est homogène, il n'y a pas de solution particulière.

▷ Pour trouver la solution homogène, partons de l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant Δ est positif (régime apériodique), et s'écrit par ailleurs

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 > 0$$

Les racines s'écrivent quant à elles

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q}(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2})$$

qui sont toutes deux négatives. La solution est alors de la forme

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

où A et B sont deux constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

• Conditions initiales

Ces conditions initiales doivent porter sur u et du/dt à l'instant 0^+. Compte tenu du début de la question, on a déjà $u(0^+) = 0$. Par ailleurs,

$$\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{1}{C}\left(\eta - i_L(0^+) - \frac{u(0^+)}{R}\right) = \frac{\eta}{C}$$

• Détermination des constantes

$$u(0^+) = A + B = 0 \quad \text{donc} \quad A = -B$$

De plus,

$$\frac{du}{dt}(0^+) = r_1 A + r_2 B = \frac{\eta}{C} \quad \text{soit} \quad B = \frac{1}{r_2 - r_1}\frac{\eta}{C}$$

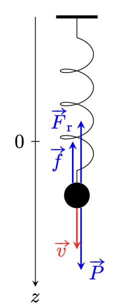
Donc $A = \dfrac{1}{r_1 - r_2}\dfrac{\eta}{C}$.

Ainsi, on en déduit

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{r_1 - r_2}\frac{\eta}{C}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})}$$

Exercice n°5 - Viscosimètre oscillant (★★)

1. Étudions le mouvement de la bille, de masse m, en évolution dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.



Le système est schématisé ci-contre à un instant quelconque où l'on suppose que le ressort est étiré et que la vitesse de la bille est orientée vers le bas. L'axe z est orienté vers le bas, et son origine $z = 0$ est choisie telle que lorsque la bille se trouve en $z = 0$ la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.

Les forces s'exerçant sur la bille sont :

▷ le poids $\vec{P} = mg\vec{u_z}$

▷ la force de rappel $\vec{F} = -kz\vec{u_z}$

Remarque : la force de rappel s'écrit ainsi car l'origine de l'axe est prise en l_0.

Par application de la loi de la quantité de mouvement projetée sur $\vec{u_z}$, on trouve

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - 6\pi\eta r\frac{dz}{dt} - kz$$

Cette équation différentielle se met sous la forme

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{6\pi\eta r}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = g$$

Par identification à la forme canonique, on en déduit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{6\pi\eta r}{m}$$

L'équation caractéristique associée a pour discriminant

$$\Delta = \left(\frac{6\pi\eta r}{m}\right)^2 - \frac{4k}{m}$$

L'énoncé parle d'oscillations, ce qui sous-entend que l'oscillateur est en régime pseudo-périodique. Le discriminant est donc négatif, et la pseudo-pulsation Ω est alors la partie imaginaire des racines de l'équation caractéristique,

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$$

La pseudo-période des oscillations vaut alors

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{4k}{m} - (\frac{6\pi\eta r}{m})^2}}$$

soit finalement

$$\boxed{T_p = \frac{2\pi m}{\sqrt{km - (3\pi\eta r)^2}}}$$

2. Si les frottements sont négligeables, le système est un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La période des oscillations est donc

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

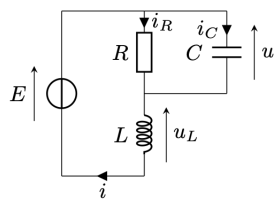
Pour obtenir le coefficient de viscosité η avec peu de calcul, notons que

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}$$

soit

$$\frac{4\pi^2}{T_p^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{9\pi^2\eta^2 r^2}{m^2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}}$$

Exercice n°6 - Encore un RLC ! (★★★)



1. Le circuit est à deux mailles, il faudra donc utiliser les deux lois de Kirchoff pour établir l'équation différentielle. Commençons par exemple par la loi des nœuds,

$$i = i_R + i_C$$

Utilisons ensuite les lois de comportement pour faire apparaître la tension u, com- mune à R et C qui sont montés en parallèle,

$$i = \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}$$

La loi des mailles permet ensuite d'exprimer la tension u en termes de la tension u_L : $u = Eu_L$. Ainsi, comme la tension E est constante,

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\frac{du_L}{dt}$$

Enfin, d'après la loi de comportement de la bobine,

$$\boxed{i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{di}{dt} - LC\frac{d^2i}{dt^2}}$$

2. Réécrivons l'équation en mettant à 1 le préfacteur devant la dérivée d'ordre le plus élevé,

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{E}{RLC}$$

soit, par identification,

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

où ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur, elle correspond à la pulsation qu'auraient les oscillations si elles étaient harmonique. Q est son **facteur de qualité**, qui décrit l'écart entre l'oscillateur et un oscillateur harmonique.

3. Comme Q doit être sans dimension, l'analyse dimensionnelle ne laisse que deux "possibilités" pour l'expression du facteur de qualité :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{ou} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Pour choisir entre les deux, rappelons que l'oscillateur harmonique électrique est un circuit LC série, sans résistance. Or dans le circuit considéré, un circuit LC s'obtient dans la limite $R \to \infty$. Ainsi, le circuit est d'autant plus proche d'un oscillateur harmonique que la résistance R est grande, ce qui justifie l'expression de Q.

4. Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

puisque $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Analysons maintenant le circuit à $t = 0^+$. Par continuité du courant traversant une bobine, on déduit directement

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

Pour trouver la valeur de di/dt, il faut trouver la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$,

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)$$

Or en tant que tension aux bornes d'un condensateur $u(0^+)$ est continue et égale à $u(0^+) = u(0^-) = 0$, d'où

$$u_L(0^+) = E \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}}$$

5. Forme générale des solutions : le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC} i_p = \frac{E}{RLC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{R}$$

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = \omega_0^2 \left((\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4}\omega_0^2 < 0 \quad \text{car} \quad Q = 2$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm i\frac{\omega_0}{4}\sqrt{15} \quad \text{qu'on note} \quad r_{1,2} = -\mu \pm i\Omega$$

où $\mu > 0$ est le taux d'amortissement et Ω la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_H(t) = e^{-\mu t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

avec A et B deux constantes. En regroupant,

$$i(t) = i_p + i_H = \frac{E}{R} + e^{-\mu t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

Détermination des constantes : on a d'abord

$$i(0^+) = 0 = \frac{E}{R} + A \quad \text{soit} \quad A = -\frac{E}{R}$$

La condition sur la dérivée nous donne :

$$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} = B\Omega - \mu A \quad \text{d'où} \quad B = \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)$$

Finalement, l'intensité s'écrit :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\mu t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{R}{\Omega}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)\sin(\Omega t)\right]}$$

Tracé : Le tracé "direct" n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté ci-dessous.