CHAPITRE 7 **Physique**
Thème *Ondes et signaux*

Signaux périodiques

Plan du chapitre

Ce qu'il faut connaître

- ☐ Connaître la définition de la valeur moyenne d'un signal périodique quelconque.
- ☐ Connaître la définition de la valeur efficace d'un signal périodique quelconque.
- ☐ Savoir définir les notions d'amplitude, de pulsation, de période, de phase d'un signal harmonique.
- ☐ Connaître la valeur efficace d'un signal harmonique.
- ☐ Définir le déphasage entre deux signaux harmoniques.

Ce qu'il faut savoir faire

- ☐ Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
- ☐ Calculer la valeur moyenne ou la valeur efficace d'un signal quelconque.
- ☐ Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- ☐ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- ☐ Savoir caractériser le spectre d'un signal périodique en utilisant les termes valeur moyenne, fondamental, harmonique.
- ☐ Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

I - Qu'est-ce qu'un signal ?

I.A - Définition

Définition d'un signal

Un **signal**, noté $s(t)$, correspond à l'enregistrement temporel d'une grandeur physique intéressante.

On distingue dès lors plusieurs types de signaux :

- Les signaux **acoustiques**, constitué de variations de la pression d'un milieu matériel, de sa masse volumique et de la vitesse des particules.
- Les signaux **électriques**, constitués de la variation de l'intensité et de la tension dans un circuit électrique.
- Les signaux **électromagnétiques**, constitués de la variation des champs électriques et magnétiques.

I.B - Cas particulier des signaux périodiques

• Définition

Il existe des signaux particuliers pour lesquels un motif se reproduit identiquement à lui-même dans le temps. On qualifie ces signaux de **périodiques**.

Signaux périodiques

Un signal $s(t)$ est **périodique** s'il se reproduit au bout d'un temps T, appelée **période** du signal (en s). Il s'agit de la durée minimale telle que :

$$s(t+T) = s(t)$$

On définit également la **fréquence** f d'un signal périodique, comme le nombre de répétitions du signal par unité de temps (en s^{-1}, ou Hz) :

$$f = \frac{1}{T}$$

On caractérise ensuite l'amplitude d'un signal périodique par les grandeurs suivantes (illustrées sur la figure 1) :

- Les valeurs minimales et maximales, notées S_{min} et S_{max}
- L'amplitude **crête à crête**, $S_{cc} = S_{\text{max}} - S_{\text{min}}$
- L'amplitude S_m dans le cas où le signal est symétrique.

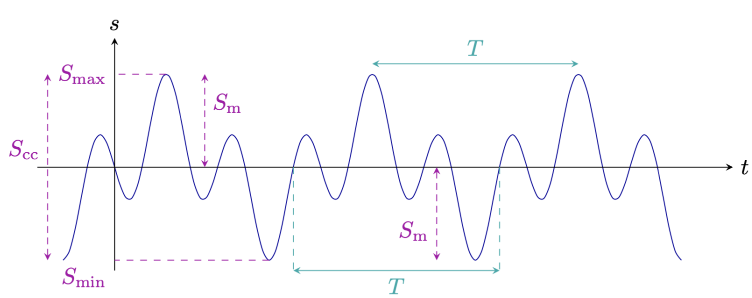


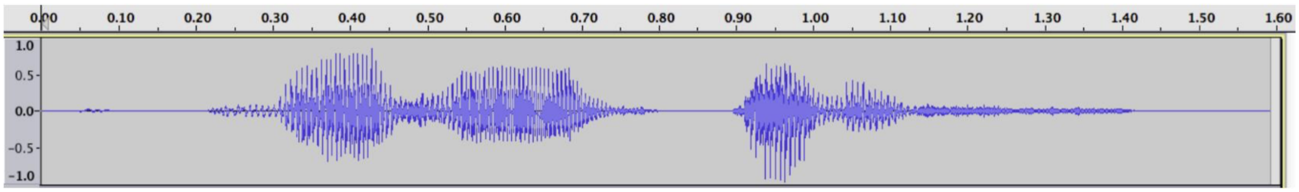
Figure 1 – Caractérisation de l'amplitude d'un signal périodique

EC1 : Signaux périodiques

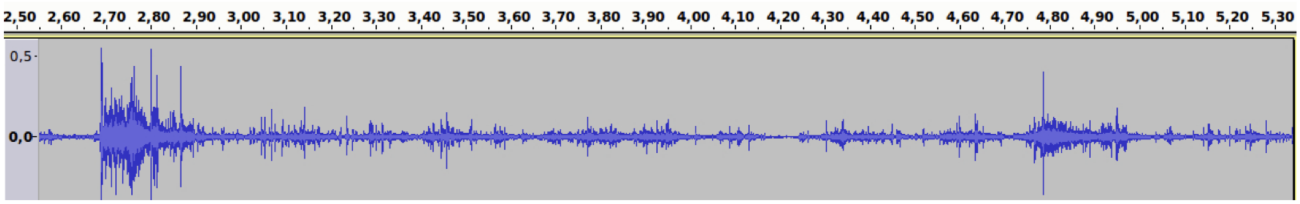
Les courbes ci-dessous représentent les chronogrammes de quatre signaux sonores : les mots ”Bonjour Alice”, du papier froissé, une note tenue au saxophone, et la tonalité d’un ancien téléphone fixe. L’axe des abscisses est gradué en secondes.

▷ Pour chacun des signaux, indiquer s’il semble périodique sur la durée d’acquisition, et le cas échéant mesurer sa période et calculer sa fréquence.

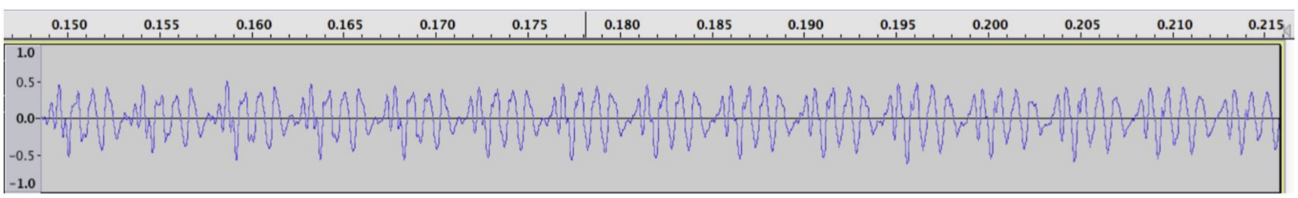
« Bonjour Alice » :



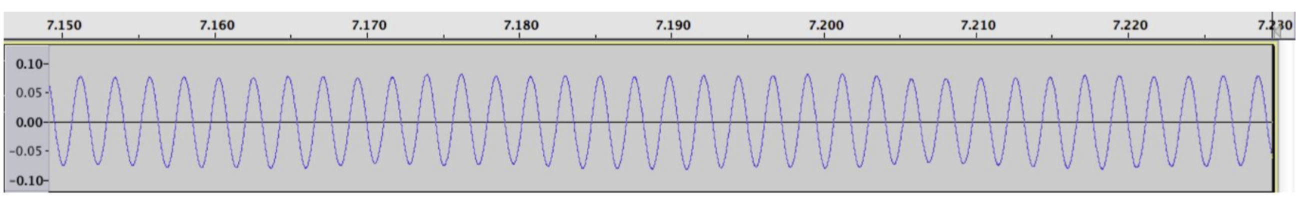
Papier froissé :



Saxophone :



Téléphone :



▷ ”Bonjour Alice” et papier froissé : non périodiques.

▷ Note du saxophone : périodique, on mesure $T_s \approx 4,5$ ms, donc $f_s \approx 222$ Hz.

▷ Tonalité du téléphone : périodique, on mesure $T_t \approx 2,3$ ms donc $f_t \approx 433$ Hz.

• Valeur moyenne d'un signal périodique

Que se passe-t-il si le signal n'est pas "centré" sur 0 ? Il faut dans ce cas une autre valeur pour le caractériser, appelée valeur moyenne.

Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal périodique, notée $\langle s(t) \rangle$, est définie par :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$$

où T désigne la période du signal, et t_0 un temps quelconque.

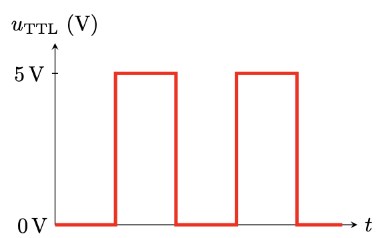
Étant donné les propriétés de l'intégrale, on a les propriétés suivantes :

▷ $\langle s_1(t) + s_2(t) \rangle = \langle s_1(t) \rangle + \langle s_2(t) \rangle$

▷ Pour toute constante λ, $\langle \lambda s(t) \rangle = \lambda \langle s(t) \rangle$

EC2 : Signal TTL

On donne ci-dessous l'allure d'une tension TTL : il s'agit d'une tension de référence utilisée en électronique en tant que signal d'horloge. Il s'agit d'une tension périodique, de période réglable, valant $U_{\text{min}} = 0$V pendant une demi période et $U_{\text{max}} = 5$ V pendant la demi période suivante.



▷ Sans calculs, déterminer l'amplitude crête-à-crête, la valeur moyenne, puis l'amplitude d'une tension TTL de période $T = 1$ ms.

▷ Amplitude crête à crête : 5V.

▷ Valeur moyenne : 2,5 V.

▷ Amplitude : 2,5 V.

• Valeur efficace d'un signal périodique

Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal périodique, notée S_{eff} est définie par :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)dt}$$

On l'appelle parfois valeur RMS pour "Root Mean Square".

Remarque : si on omet la racine carrée, on parle de **valeur quadratique moyenne** (donc pour la quantité $\langle s^2(t) \rangle$).

La valeur efficace intervient lorsqu'on s'intéresse à l'énergie d'un signal, car souvent il apparaît un carré. Par exemple avec la puissance dissipée par effet Joule $P = Ri^2(t)$: $\langle P \rangle$ fait intervenir la moyenne quadratique de $i(t)$. La valeur efficace correspond à la valeur continue qui produirait le même effet Joule que la grandeur variable dans une résistance, pendant le même temps.

EC3 : Calculer une valeur moyenne ou une valeur efficace

1. Calculer $\langle \cos(\omega t) \rangle$, ainsi que $\langle \cos^2(\omega t) \rangle$.

2. Même question avec un sinus.

3. On considère le signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Montrer que sa valeur moyenne est nulle, et que sa valeur efficace vaut $S/\sqrt{2}$.

4. Que vaut la moyenne du signal $s(t) = 3 + 8\cos(\omega t + \pi/2)$ (sans refaire de calcul d'intégrale) ?

On donne : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

1. $\langle \cos(\omega t) \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \dfrac{1}{2}$

2. Mêmes résultats pour le sinus.

4. $\langle 3 + 8\cos(\omega t + \pi/2) \rangle = \langle 3 \rangle + \langle 8\cos(\omega t + \pi/2) \rangle = 3$

II - Le signal harmonique (ou signal sinusoïdal)

II.A - Définitions

▷ **Animation Geogebra** permettant de faire varier les paramètres d'un signal harmonique.

Signal harmonique

Un signal **harmonique** est un signal de la forme

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

où S_0 désigne l'**amplitude** du signal, ω sa **pulsation** et φ la **phase à l'origine**.

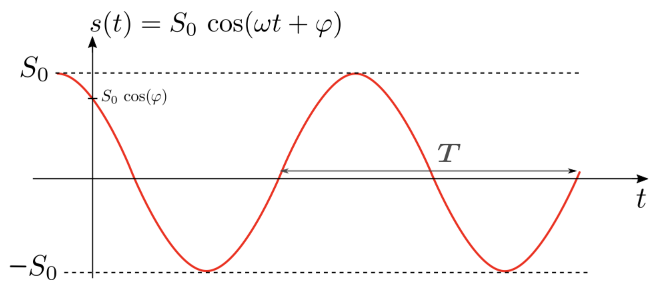


FIGURE 2 – Paramètres d'un signal harmonique

⇝ **Démonstration du lien entre T et ω**

Cherchons T tel que le signal soit périodique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$S_0 \cos(\omega(t + T) + \varphi) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

soit

$$\cos(\omega t + \omega T + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$$

Par périodicité du cosinus, on en déduit que $\omega T = 2\pi$, d'où :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Remarque : le sinus n'est que le cas particulier du signal précédent où $\varphi = \pi/2$:

$$S_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = S_0 \sin(\omega t)$$

II.B - Valeur moyenne et valeur efficace

⇝ Cf EC2 :

▷ $\langle\cos(\omega t)\rangle = 0$ et $\langle\cos^2(\omega t)\rangle = 1/2$

▷ Pour le signal $S_0 \cos(\omega t + \varphi)$, $S_{\text{eff}} = S_0/\sqrt{2}$

Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal harmonique

Pour un signal harmonique de la forme $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$, on a :

$$\langle s \rangle = 0 \quad \text{et} \quad S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$$

II.C - Déphasage entre signaux harmoniques

• Définition et principe de mesure

On considère deux signaux sinusoïdaux de même période, et donc de même pulsation ω : on dit alors que ces deux signaux sont **synchrones**.

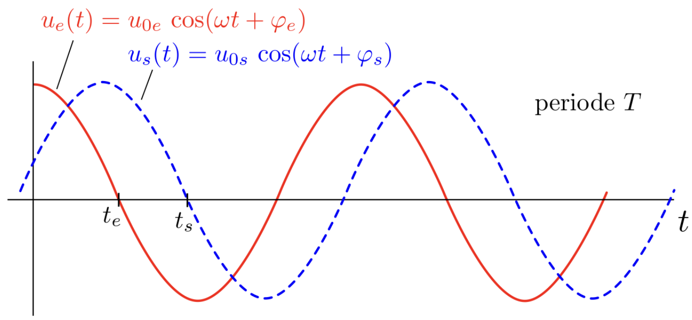


FIGURE 3 – Signaux synchrones déphasés

Déphasage

Le déphasage du signal u_s par rapport au signal u_e est défini comme

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_e$$

$\rightsquigarrow$ Comment relier le déphasage au décalage temporel des signaux ? Repérons pour cela les passage par 0 des deux signaux, atteints respectivement aux temps t_e et t_s.

- $\triangleright$ u_e est nul lorsque $\omega t_e + \varphi_e = \pi/2$ soit $t_e = \dfrac{1}{\omega}(\dfrac{\pi}{2} - \varphi_e)$
- $\triangleright$ u_s est nul lorsque $\omega t_s + \varphi_s = \pi/2$ soit $t_s = \dfrac{1}{\omega}(\dfrac{\pi}{2} - \varphi_s)$

On en déduit ainsi :

$$t_e - t_s = -\frac{\varphi_e}{\omega} + \frac{\varphi_s}{\omega} = -\frac{2\pi}{T}\Delta\varphi$$

Mesurer un déphasage entre deux signaux

On repère deux instants consécutifs (les plus proches possibles) où les signaux passent par 0. On les note t_e et t_s. Le déphasage est alors donné par :

$$\Delta\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \frac{2\pi}{T}(t_e - t_s)$$

Remarques :

▶ À la place de deux passages par 0, on peut tout aussi bien choisir deux maxima, ou deux minima. C'est même obligatoire si les signaux ne sont pas centrés sur 0 (pas de moyenne nulle).

▶ Tout comme φ_s et φ_e, le déphasage est défini à 2π près.

▶ Sur l'exemple ci-dessus, la sortie est en retard sur l'entrée, car elle passe par 0 après l'entrée (t_s est après t_e). La figure 4 illustre cette notion.

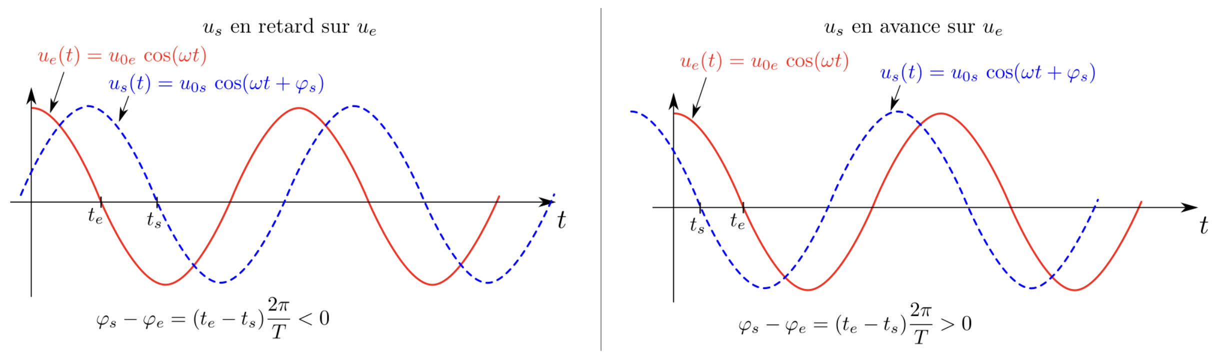


FIGURE 4 – Illustration de l'avance ou du retard de phase

• Quelques cas particuliers

⇝ Signaux en **phase** : $\Delta\varphi = 0$

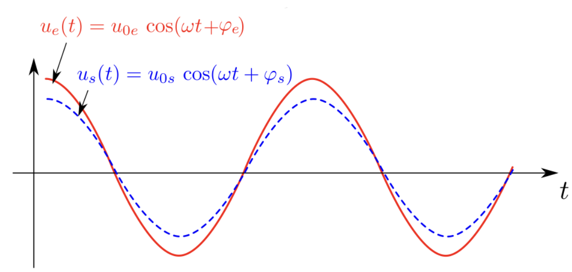


FIGURE 5 – Signaux en phase

⇝ Signaux en **quadrature de phase** : $\Delta\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

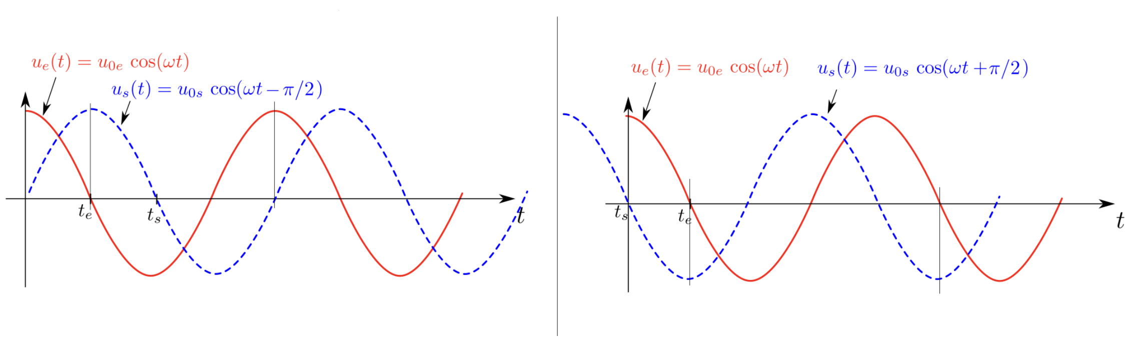


FIGURE 6 – Signaux en quadrature de phase

⇝ Signaux en **opposition de phase** : $\Delta\varphi = \pm\pi$

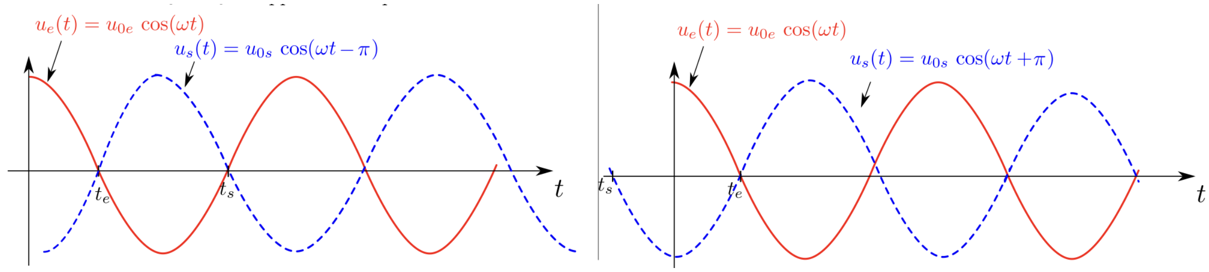


FIGURE 7 – Signaux en opposition de phase

III - Spectre d'un signal périodique

III.A - Théorème de Fourier

Pourquoi étudier le signal harmonique, qui est en apparence simple et a l'air plutôt restrictif ? J. Fourier a montré qu'il était possible de décomposer n'importe quel signal périodique en une somme de signaux harmoniques.

Theorème de Fourier

Soit $s(t)$ un signal périodique de période T, de fréquence $f_0 = 1/T$ et $\omega_0 = 2\pi f$ sa pulsation. Ce signal se décompose sous la forme d'une somme de signaux harmoniques de fréquences multiples entières de f_0 :

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

- c_0 désigne la **composante continue** du signal (ou valer moyenne), de fréquence nulle ;
- le n-ième terme est appelé **harmonique de rang** n. Sa pulsation est $n \times \omega_0$, et sa fréquence $n \times f_0$;
- l'harmonique $n = 1$ est appelé **fondamental**.

L'ensemble des (c_n, φ_n) est appelé **coefficients de Fourier**.

Le tracé de l'amplitude c_n en fonction de sa fréquence (ou de n) est appelé **spectre du signal**. On donne ci-dessous des exemples de spectres usuels.

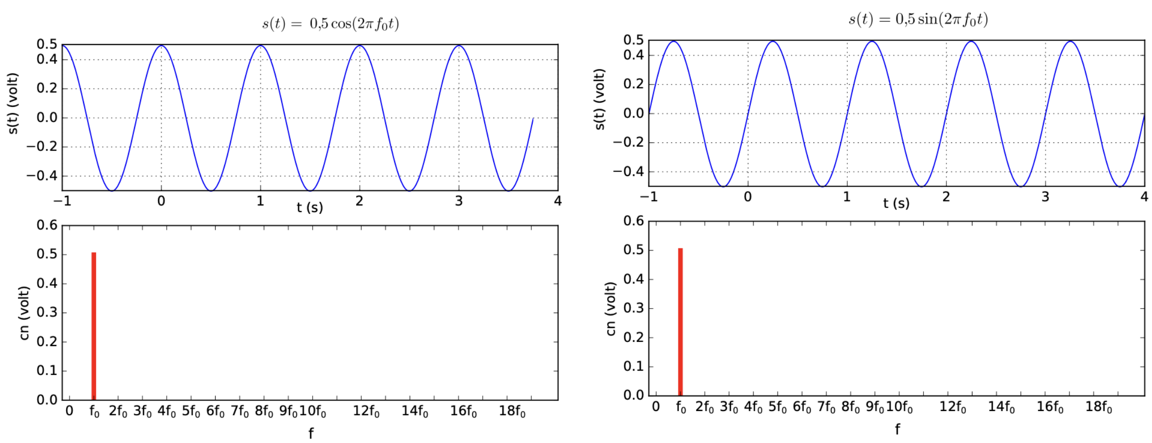


FIGURE 8 – Spectre d'un signal harmonique : une seule fréquence apparaît sur le spectre, celle du fondamental.

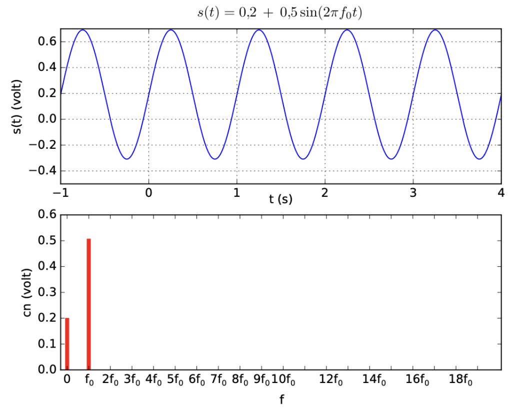
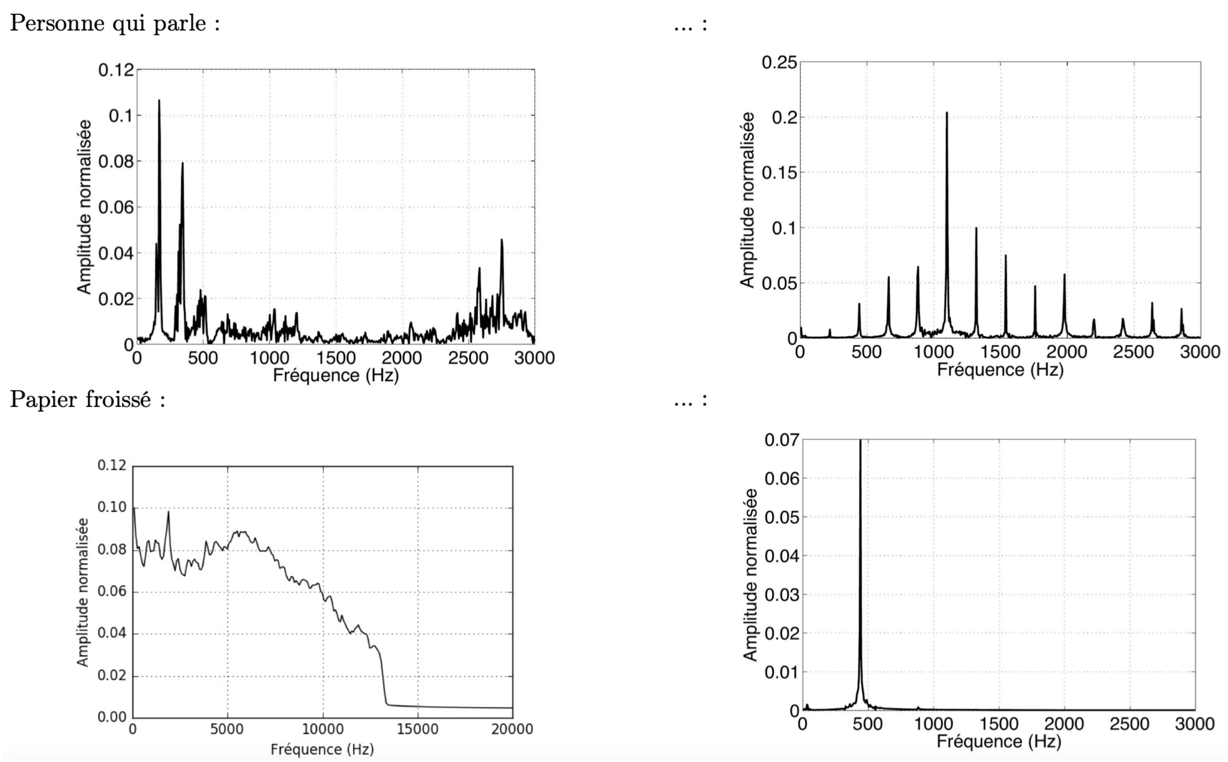


FIGURE 9 – Spectre d'un signal harmonique avec composante continue : une composante à fréquence nulle, correspondant à la valeur moyenne non nulle du signal, apparaît en plus sur le spectre.

▷ **Animation Flash** permettant de jouer sur la synthèse spectrale d'un son.

EC4 : Exploiter un spectre

On donne ci-dessous les spectres correspondant aux quatre signaux de l'exercice C1.



1. Compléter l'identification en attribuant le bon signal au saxophone et à la tonalité de téléphone.

2. Quelle est la fréquence de la note jouée par le saxophone (fondamental) ? Et celle de la tonalité du téléphone ?

3. Que dire des pics à basse fréquence sur le signal parlé "Bonjour Alice" ?

1. En haut à droite : saxophone. En bas à droite : tonalité du téléphone.

2. On voit que le fondamental est situé à $f = 230$ Hz, ce qui est cohérent avec la valeur calculée dans l'EC1. Pour la tonalité du téléphone, on lit $f \approx 450$ Hz ce qui est aussi cohérent avec la valeur calculée dans l'EC1.

3. Les pics à basse fréquence sur le signal parlé correspondent aux fréquences naturelles de la voix humaines (cordes vocales qui vibrent).

III.B - Spectre des signaux carré et triangle

• Signal carré (ou créneau)

Les coefficients de Fourier du signal carré s'obtiennent par :

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$$

Le signal carré ne contient donc que des harmoniques impaires du fondamental La figure 10 illustre le spectre d'un tel signal, où les harmoniques sont restreintes. Bien sûr, pour reconstituer fidèlement le signal créneau, il faut sommer les harmoniques jusqu'à l'infini.

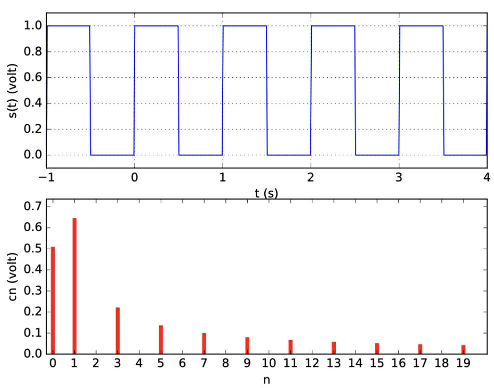


FIGURE 10 – Signal créneau et spectre associé : il n'y a que des harmoniques impaires du fondamental. Il est à noter qu'il y aussi une composante continue non nulle (fréquence nulle).

• Signal triangle

Les coefficients de Fourier du signal triangle s'obtiennent par :

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{4}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_n = \pi$$

Le signal triangle ne contient donc que des harmoniques impaires du fondamental : $3f_1$, $5f_1$, ... On illustre ci-dessous la recomposition spectrale d'un signal triangle.

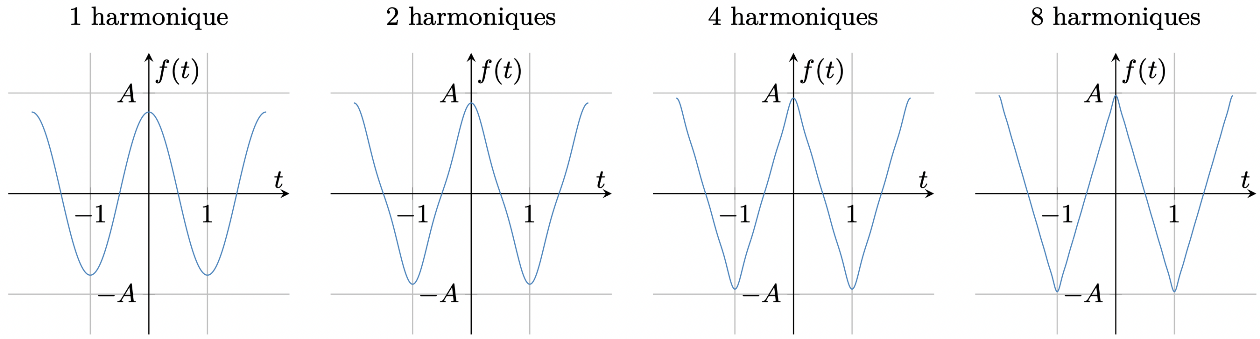


FIGURE 11 – Approximation du signal triangle en tronquant la série de Fourier à $n = 1$, 3, 7 et 15

⇝ Tracer ci-dessous le spectre du signal triangle donné.

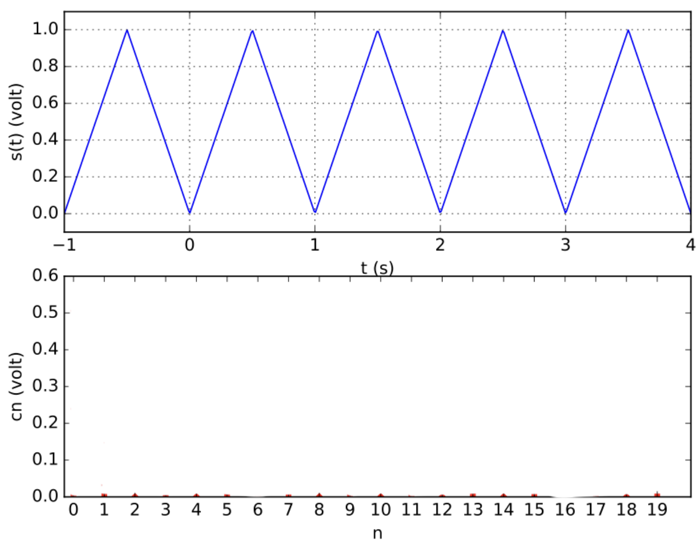


FIGURE 12 – Signal triangle et spectre associé

III.C - Spectre et énergie

La valeur efficace S_{eff} d'un tel signal s'écrit, selon la définition donnée précédemment :

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s_0^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 \cos^2(n\omega_0 t + \varphi_n) dt}$$

$$= \sqrt{s_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2} = \sqrt{s_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Qu'est-ce que cette équation signifie ? La puissance moyenne du signal est proportionnelle au carré de sa valeur efficace. Or, chaque harmonique transporte également une puissance proportionnelle à sa valeur efficace. La relation précédente exprime simplement le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances transportées par les différentes harmoniques.

Spectre et énergie

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :

$$S_{\text{eff}}^2 = s_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} s_{n,\text{eff}}^2$$

Ressources intéressantes

▷ La **vidéo de Smarter Every Day** sur la série de Fourier.

▷ Plus technique, mais aussi plus explicative : la **vidéo de 3Blue1Brown** sur les séries de Fourier.

▷ La **vidéo de Veritasium** sur la Fast Fourier Transform (FFT), l'algorithme fondamental de traitement du signal, basé sur le théorème de Fourier.