Fiche méthode

Les nombres complexes en physique

Dans toute cette fiche, on notera a et b des nombres réels, $\underline{z}$, $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ des nombres complexes.

$$\boxed{\text{On définit le nombre complexe } j \text{ tel que } j^2 = -1}$$

• Partie réelle et imaginaire

Partie relle et partie imaginaire d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe $\underline{z} = a + jb$.

▷ La partie **réelle** de $\underline{z}$, notée $\text{Re}(\underline{z})$ est égale à a.

▷ La partie **imaginaire** de $\underline{z}$, notée $\text{Im}(\underline{z})$ est égale à b.

En physique, seule la partie réelle a une signification.

• Interprétation géométrique

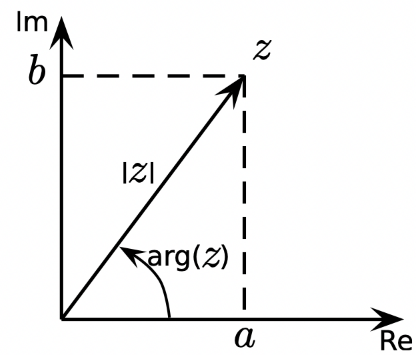
Soit $\underline{z} = a + jb$.

On se place dans le plan complexe, c'est-à-dire le plan muni d'un repère (Re, Im). On peut associer au nombre complexe $\underline{z}$ un vecteur, dont :

▷ a et b sont les coordonnées cartésiennes.

▷ $|z|$ est la norme, appelée **module**.

▷ L'angle entre l'axe des abscisses et le vecteur représentant $\underline{z}$ est appelé **argument** de $\underline{z}$, noté $\arg(\underline{z})$.



• Module

Module d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe $\underline{z} = a + jb$.

Le **module** de $\underline{z}$, noté $|\underline{z}|$ est donné par :

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En physique, calculer le module d'une grandeur complexe revient à calculer **l'amplitude** de cette grandeur.

Propriétés :

$$|\underline{z}_1 \times \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

• Argument

Argument d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe $\underline{z} = a + jb$.

L'**argument** de $\underline{z}$, noté $\arg(\underline{z})$ est donné par :

$$\arg(\underline{z}) = \arctan\frac{b}{a} \quad \text{dans le cas où } a > 0$$

$$\arg(\underline{z}) = \pi + \arctan\frac{b}{a} \quad \text{dans le cas où } a < 0$$

En physique, calculer l'argument d'une grandeur complexe revient à calculer **la phase** de cette grandeur.

> **Remarque :** on peut se convaincre de cette formule grâce à l'interprétation géométrique : la tangente de l'argument de $\underline{z}$ vaut b/a, ce qui justifie la formule donnée.

Propriétés :

$$\arg(\underline{z}_1\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)$$

Valeurs particulières (avec $a > 0$:)

$$\arg(a) = 0; \quad \arg(-a) = \pi; \quad \arg(aj) = \pi/2; \quad \arg(-aj) = -\pi/2$$

• Exponentielle complexe

Exponentielle complexe

Soit ϕ un nombre réel. **L'exponentielle complexe** $e^{j\phi}$ est donnée par :

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$$

Propriétés :

- ▷ $\mathrm{Re}(e^{j\phi}) = \cos(\phi)$ et $\mathrm{Im}(e^{j\phi}) = \sin(\phi)$
- ▷ $|e^{j\phi}| = 1$
- ▷ Si $\underline{z} = Xe^{j\phi}$, alors $\boxed{|\underline{z}| = X \text{ et } \arg(\underline{z}) = \phi}$
- ▷ On peut écrire : $\underline{z} = |\underline{z}|e^{j\arg(\underline{z})}$

Exercices pour s'entraîner

Pour chaque nombre complexe $\underline{H}$, déterminer son module $|\underline{H}|$ ainsi que son argument $\arg(\underline{H})$.

1. $\underline{H} = \dfrac{-\alpha}{1 + j\omega\tau}$ ($\alpha > 0$, réel)

2. $\underline{H} = \dfrac{1}{j\omega\tau}$

3. $\underline{H} = H_0 \dfrac{j\omega\tau - 1}{j\omega\tau + 1}$ ($H_0 > 0$, réel)

Réponses :

1. $|\underline{H}| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$ et $\arg(\underline{H}) = \pi - \arctan(\omega\tau)$

2. $|\underline{H}| = \frac{1}{|\omega\tau|}$ et $\arg(\underline{H}) = \pi/2$

3. $|\underline{H}| = |H_0|$ et $\arg(\underline{H}) = \pi - 2\arctan(\omega\tau)$