Formulaire de trigonométrie

1 - Les triangles

a) Rappel : conversion degrés / radians

▷ Un angle en degrés (°) peut être converti en radians (rad) selon la formule suivante :

$$\boxed{\theta_{\text{deg}} = \theta_{rad} . \frac{180}{\pi}}$$

Pour information, un degré vaut approximativement 17,5 milliradians.

▷ Un angle en radians peut être converti en degrés selon la formule suivante :

$$\boxed{\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} . \frac{\pi}{180}}$$

Pour information, un radian vaut approximativement 57,3°.

Quelques valeurs remarquables à connaître : $\boxed{\frac{\pi}{4} = 45°,\ \frac{\pi}{2} = 90°,\ \pi = 180°,\ 2\pi = 360°.}$

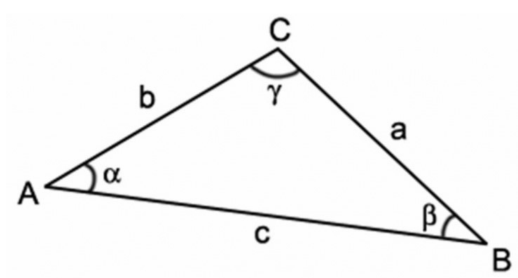
b) Angles dans un triangle

▷ Dans un triangle, la somme des angles est égale à 180°.

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi}$$

▷ La loi des sinus énonce que :

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}}$$



c) Triangles rectangles

▷ On utilise le moyen mnémotechnique suivant dans un triangle rectangle :

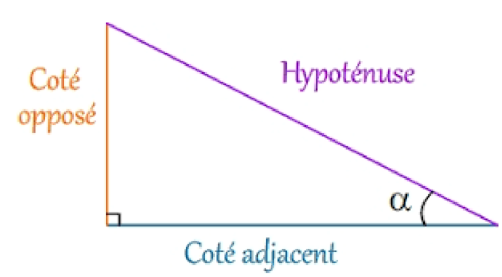
SOH CAH TOA

soit :

$$\boxed{\text{SOH : } \sin \alpha = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}}$$

$$\boxed{\text{CAH : } \cos \alpha = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}}$$

$$\boxed{\text{TOA : } \tan \alpha = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}}$$



2 - Les fonctions trigonométriques

a) Cosinus

La fonction **cosinus** est une fonction mathématique périodique d'un angle.

Propriétés remarquables du cosinus :

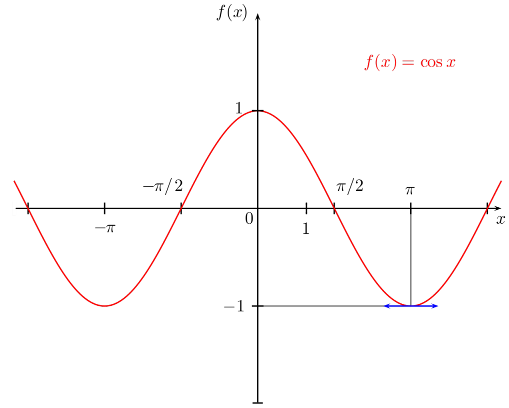
▷ $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ (fonction **périodique**)

▷ $\cos(-x) = \cos(x)$ (fonction **paire**)

▷ $\cos(0) = 1$

▷ $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0\ [2\pi]$

▷ $\cos'(x) = -\sin(x)$



Représentation graphique de la fonction $\cos(x)$

b) Sinus

La fonction **sinus** est aussi une fonction mathématique périodique d'un angle.

Propriétés remarquables du sinus :

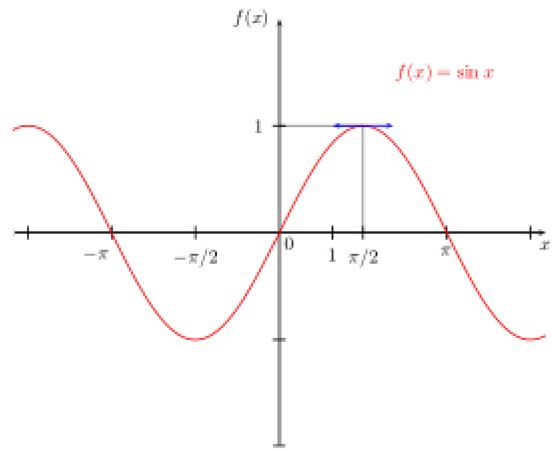
▷ $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ (fonction **périodique**)

▷ $\sin(-x) = -\sin(x)$ (fonction **impaire**)

▷ $\sin(0) = 0$

▷ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1\ [2\pi]$

▷ $\sin'(x) = \cos(x)$



Représentation graphique de la fonction $\sin(x)$

c) Tangente

La fonction **tangente** est une fonction mathématique d'un angle. La fonction tangente est définie par :

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$$

Propriétés remarquables de la tangente :

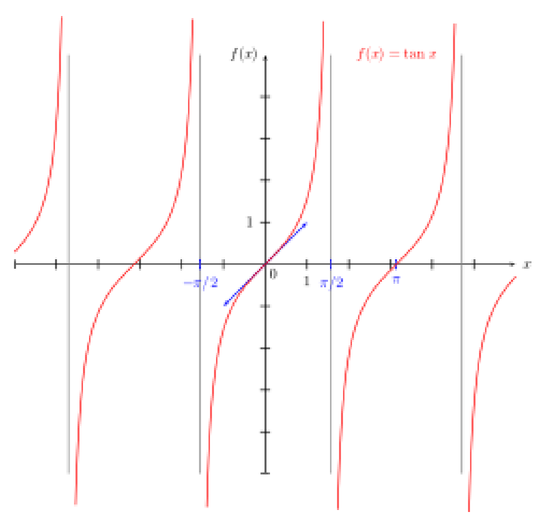
▷ $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$ pour tout k entier

▷ $\tan(-x) = -\tan(x)$ (fonction **impaire**)

▷ $\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$

▷ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1\ [2\pi]$

▷ $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$



Représentation graphique de la fonction $\tan(x)$

d) Approximation aux petits angles

Lorsque l'angle en argument des fonction trigonométriques est faible (proche de 0 rad), on peut réaliser un **développement limité** de ces fonctions (cf. cours de mathématiques). En s'arrêtant au premier ordre, cela consiste à dire que :

$$\boxed{\cos(x) \approx 1 \qquad \sin(x) \approx x \qquad \tan(x) \approx x}$$

On peut s'en convaincre facilement grâce aux représentations graphiques de la partie précédente.

3 - Les formules trigonométriques

a) Formules entre cos, sin et tan

▷ $\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$

▷ $\boxed{1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}}$

b) Formules d'addition

▷ $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$

▷ $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$

▷ $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$

▷ $\boxed{\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b}$

Connaissez par coeur ces formules : elles sont essentielles et permettent de redémontrer toutes celles qui suivront. Je vous invite chez vous à essayer d'effectuer ces démonstrations, c'est un exercice formateur.

c) Formules de linéarisation

▷ $\boxed{\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}}$

▷ $\boxed{\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}}$

▷ $\boxed{\tan^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}}$

▷ $\boxed{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2})}$

▷ $\boxed{\cos(p) - \cos(q) = 2\sin(\dfrac{p+q}{2})\sin(\dfrac{p-q}{2})}$

▷ $\boxed{\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2})}$

▷ $\boxed{\sin(p) - \sin(q) = 2\sin(\dfrac{p-q}{2})\cos(\dfrac{p+q}{2})}$

4 - Le cercle trigonométrique

a) Présentation

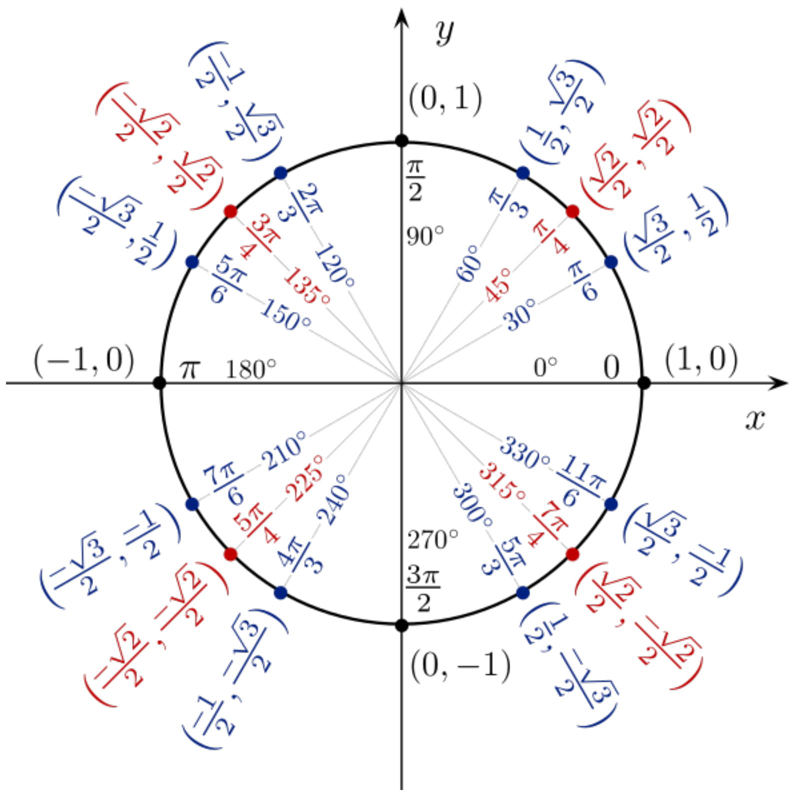
Le cercle trigonométrique est un cercle particulièrement utile pour définir les angles ainsi que les fonctions trigonométriques. Il s'agit du cercle dont le rayon est égal à 1 centré sur l'origine du repère. L'équation cartésienne du cercle est donnée par la formule donnée précédemment :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

▷ $\boxed{\text{L'abscisse du repère correspond à } \cos(x) \text{ et son ordonnée correspond à } \sin(x).}$

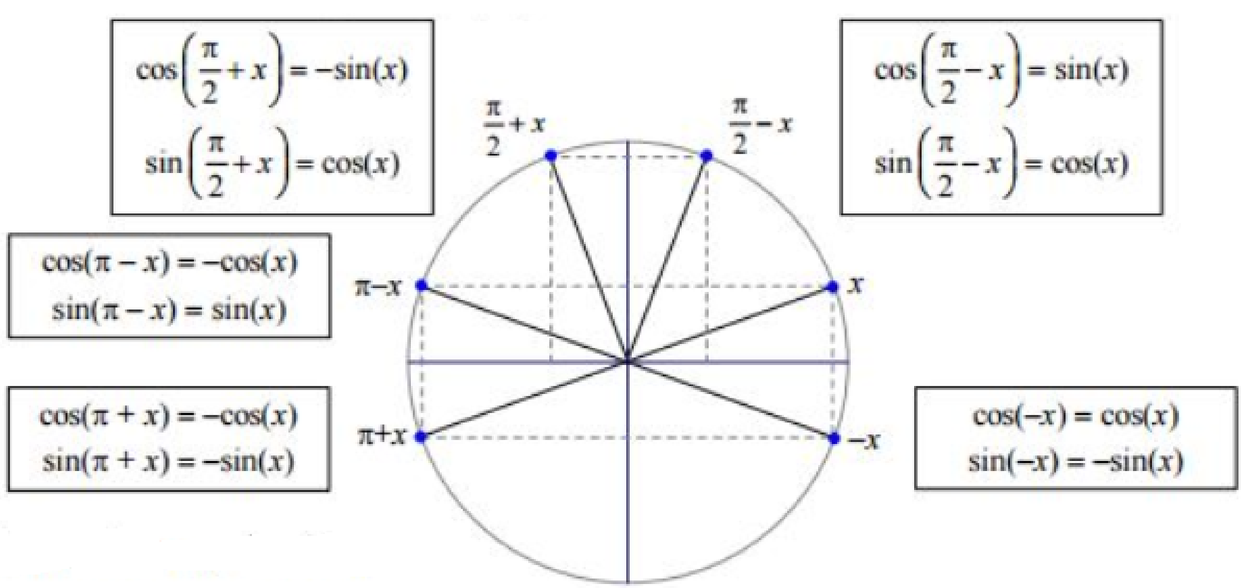
b) Valeurs remarquables du cercle

Il existe sur le cercle trigonométrique des valeurs remarquables. Celles-ci sont présentées ci-dessous sous la forme $(\cos(x), \sin(x))$.



c) Correspondances sinus-cosinus

Par lecture graphique, on voit qu'il existe des correspondances entre le sinus et le cosinus en fonction de l'argument. Il est impératif de savoir retrouver rapidement, en traçant un cercle trigonométrique, l'ensemble de ces correspondances.



5 - Les fonctions réciproques

La fonction réciproque d'une fonction $f(x)$, notée $f^{-1}(x)$ est définie comme :

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

Il existe des fonctions réciproques pour les trois fonctions trigonométriques données dans la partie II.

a) Arc cosinus

La fonction **arc cosinus**, notée arccos(x) est définie sur l'intervalle [-1,1] par :

$$\boxed{\arccos(\cos(x)) = x}$$

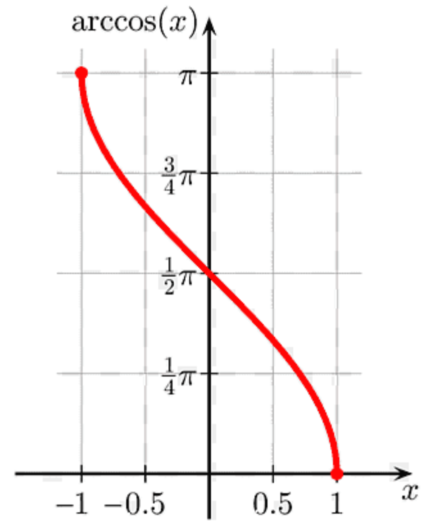
Propriétés remarquables du arccos :

▷ $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

▷ $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$

▷ $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

▷ $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$



Représentation graphique de la fonction $\arccos(x)$

b) Arc sinus

La fonction **arc sinus**, notée arcsin(x) est définie sur l'intervalle [-1,1] par :

$$\boxed{\arcsin(\sin(x)) = x}$$

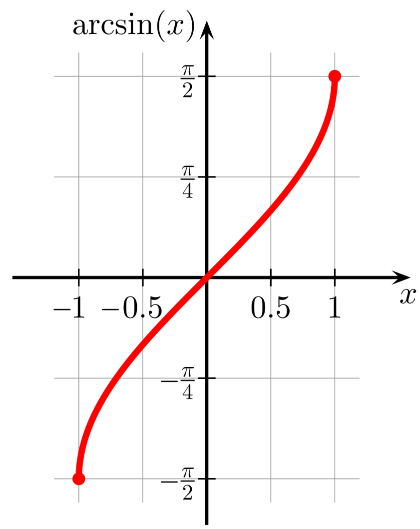
Propriétés remarquables du arcsin :

▷ $\arcsin(0) = 0$

▷ $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

▷ $\tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

▷ $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



Représentation graphique de la fonction $\arcsin(x)$

▷ On pourra également remarquer que $\boxed{\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}}$

c) Arc tangente

La fonction **arc tangente**, notée arctan(x) est définie sur l'intervalle $[-\infty, +\infty]$ par :

$$\boxed{\arctan(\tan(x)) = x}$$

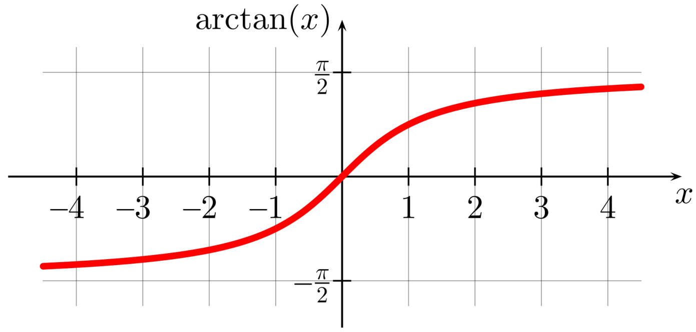
Propriétés remarquables de l'arctan :

▷ $\arctan(-x) = -\arctan(x)$

▷ $\arctan(\frac{\pi}{2}) = +\infty$

▷ $\arctan(-\frac{\pi}{2}) = -\infty$

▷ $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



Représentation graphique de la fonction $\arctan(x)$