Peut-on casser un verre en chantant ?

D'après Centrale 2018, filière TSI

Dans le vingt-et-unième album de la série "Les Aventures de Tintin", intitulé "Les Bijoux de la Castafiore", cette dernière est en mesure de faire exploser un verre par la simple utilisation de sa voix. Le présent sujet se penche sur les aspects physiques de ce phénomène. Nous nous intéressons dans ce problème aux circonstances dans lesquelles il est effectivement possible de réaliser une telle prouesse et nous nous pencherons sur les rôles joués par les différents paramètres physiques susceptibles d'influer sur ces circonstances.

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre mis ainsi en vibration. Le principe de l'expérience est présenté figure 1.

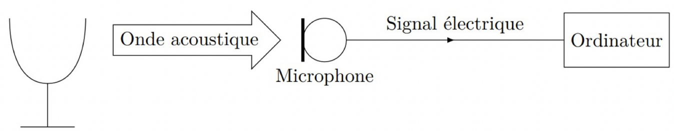

Figure 1: Expérience mise en place pour analyser les vibrations du verre

Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur. Son analyse spectrale peut alors être réalisée à tout moment de l'enregistrement. Le microphone utilisé pour l'enregistrement présente une courbe de réponse en fonction de la fréquence donnée sur la figure 2.

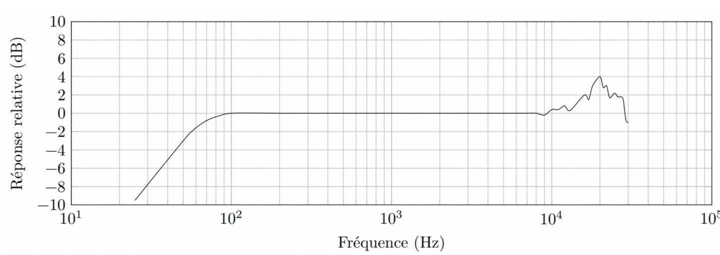

Figure 2: Réponse relative du microphone en fonction de la fréquence

La figure 3 représente le chronogramme de cet enregistrement, c'est-à-dire le signal temporel acquis par le microphone, ainsi qu'une analyse spectrale réalisée peu après le début de l'enregistrement.

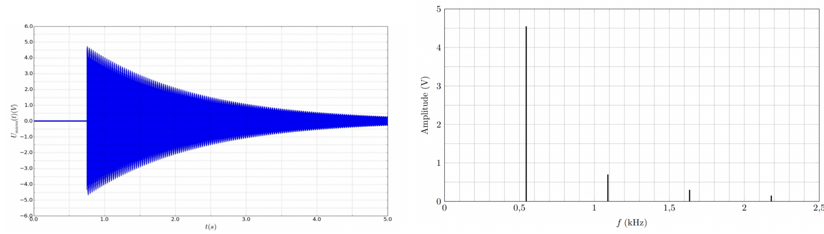

Figure 3: Chronogramme de l'enregistrement (à gauche) et spectre du signal acquis (à droite).

I. Analyse qualitative de l'enregistrement

Les "pics" représentés dans les analyses spectrales correspondent à des **modes propres** de vibration du verre.

1. Que signifie la présence de modes propres dans le signal enregistré ? Expliquer à l'aide des notions de "fondamental" et "harmonique".
2. Quelle est la fréquence du signal enregistré ?
3. Donner la fréquence des différents modes propres. Par quelle relation simple sont liées ces fréquences ?
4. Quelle caractéristique de la courbe de réponse du microphone est essentielle pour réaliser un enregistrement et une analyse spectrale représentant correctement le phénomène étudié ?

II. Mise en équation

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse m mobile sur l'axe (Ox) horizontal associée à un ressort de raideur k de longueur à vide nulle (figure 4).

Figure 4: Modèle mécanique du déplacement

Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse de la masse m.

5. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, montrer que $x(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

où l'on exprimera ω_0 et Q en fonction des données du problème.

6. Quel est le nom de ω_0 et de Q ? Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ?

7. Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas d'un frottement "faible", l'expression approchée de la solution $x(t)$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0$. Représenter graphiquement son allure.

8. En quoi, l'enregistrement du chronogramme de la figure 3 est-il en accord à la modélisation par un frottement fluide ?

9. Grâce aux amplitudes des oscillations, on peut estimer le facteur de qualité Q du système : $Q \approx 2,7.10^3$. Estimer alors le temps caractéristique du régime transitoire de ce système. Comparer avec une lecture graphique directement effectuée sur la figure 3.

III. Étude de la résonance en amplitude du verre en RSF

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée. Un haut parleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f. Le verre, placé à proximité du haut-parleur (figure 5), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

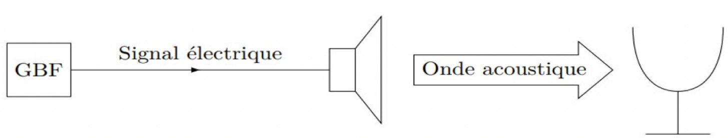

Figure 5: Étude du verre en RSF

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ est alors de la forme suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t)$$

avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence.

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X\cos(\omega t + \phi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$ avec $j^2 = -1$.

10. Comment nomme-t-on la grandeur $\underline{X}$? Quelle est son expression ? Que représente son module, son argument ?

11. Quelle équation vérifie $\underline{X}$?

12. Établir l'expression du module de $\underline{X}$ en fonction de ω, ω_0 , A_0 et Q.

13. À partir d'une étude qualitative, justifier le numéro de graphe de la figure 6 compatible avec le tracé du module de X en fonction de la pulsation.

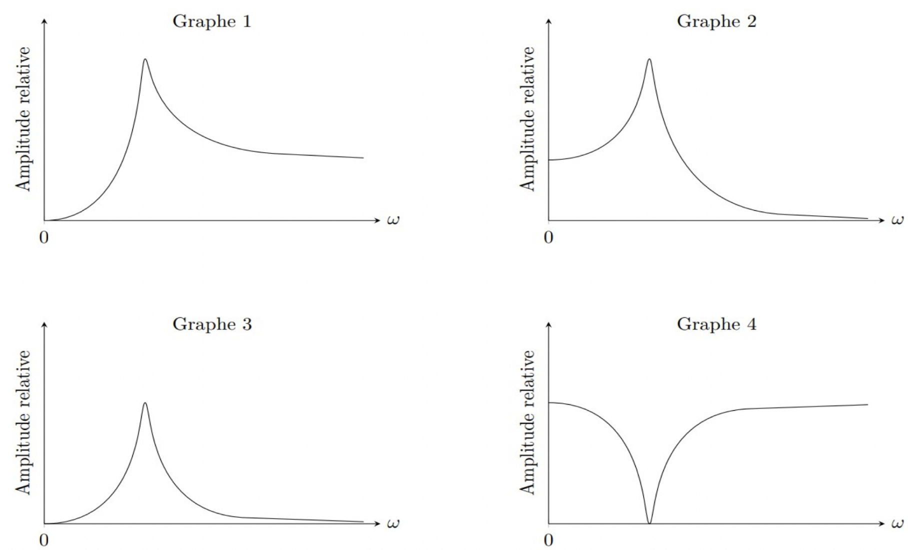

Figure 6: Tracés de $|\underline{X}|$ en fonction de ω

14. Montrer que la résonance en amplitude existe pour une pulsation notée ω_r uniquement si $Q > Q_0$. Déterminer la valeur de Q_0 et l'expression de ω_r en fonction de ω_r et Q.

Dans la suite, on suppose $Q \gg Q_0$.

15. Quelle est alors l'expression simplifiée de la pulsation de résonance ω_r ?

16. On note X_r le module de X pour lequel $\omega = \omega_r$. Établir son expression en fonction de ω_r, A_0 et Q.

17. Définir (sans les calculer) les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 (avec $\omega_1 < \omega_2$) du module de X. On montre alors que :

$$Q = \frac{\omega_r}{\omega_2 - \omega_1}$$

18. Une série de mesure de l'amplitude de X au voisinage de la résonance permet de tracer le graphe représenté sur la figure 7. À partir de la figure 7, déterminer un ordre de grandeur de la fréquence de résonance f_r et du facteur de qualité Q du verre. Commenter.

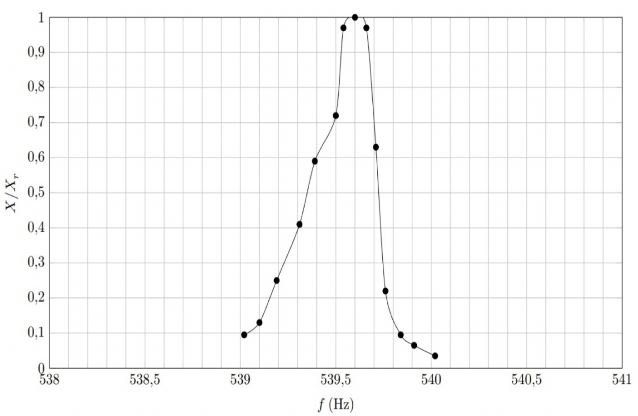

Figure 7: Amplitude relative en fonction de la fréquence

19. Est-il alors plausible que la Castafiore dans Tintin puisse mettre en résonance le verre au point de le briser ? Discuter à la lumière des questions précédentes, ainsi qu'à l'aide de vos connaissances sur les ondes sonores.