Exercice n°1 : Champagne !

1. Le poids de la bulle de champagne a pour norme :

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g$$

Comme tout corps plongé dans un fluide, le bulle a une poussée d'Archmiède de norme :

$$\Pi_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g$$

Ainsi le rapport entre les normes des deux forces vaut :

$$\frac{P}{\Pi_A} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g} = \frac{\rho_g}{\rho_l} = \frac{1}{1000} \ll 1$$

On en déduit donc que **le poids de la bulle peut être négligé devant sa poussée d'Archimède.**

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la bulle dans le référentiel terrestre, supposé galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Pi_A} + \vec{f}$$

En projetant selon l'axe (Oz), on a :

$$m\frac{dv_z}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g - 6\pi\eta r v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m} v_z = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g}{m}$$

On peut ainsi identifier terme à terme avec l'équation canonique donnée dans l'énoncé :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi\eta r}{m} \quad \text{soit} \quad \tau = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g}{6\pi\eta r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tau = \frac{2r^2\rho_g}{9\eta}}$$

et

$$\frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g}{m} \quad \text{soit} \quad v_{\text{lim}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g}{m} \text{ x } \frac{m}{6\pi\eta r} \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_{\text{lim}} = \frac{2r^2\rho_l g}{9\eta}}$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

▶ **Solution particulière :** $v_p = v_{\text{lim}}$

▶ **Solution homogène :** $v_h(t) = A\exp -\frac{t}{\tau}$

▶ **Condition initiale :** à $t = 0$, la bulle est sans vitesse initiale donc $v_z(0) = 0$. On en déduit $A = -v_{\text{lim}}$. Ainsi, la solution s'écrit :

$$\boxed{v_z(t) = v_{\text{lim}}\left(1 - \exp -\frac{t}{\tau}\right)}$$

4. et 5. Le tracé est donné ci-dessous.

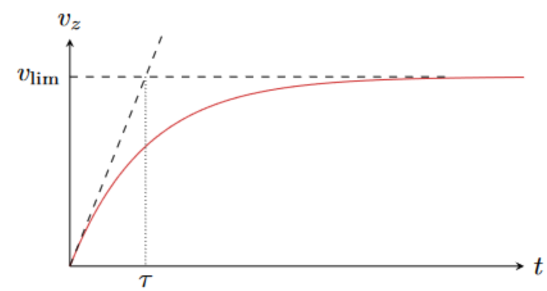

Figure 1: Tracé de la vitesse de la bulle en fonction du temps

6. On trouve par application numérique $\tau \approx 10^{-4}$ s, ce qui est bien plus faible que le temps que met la bulle à remonter dans la flûte, de l'ordre de 1 s. **On peut donc négliger la durée du transitoire** et considérer que la bulle est à tout instant en régime permanent, soit $v_z = v_{\text{lim}}$.

7. Comme l'émission est périodique de période T , choisir $f_b = 1/T$ permet d'observer une multitude de bulles, mais dont les positions correspondent aux positions successives d'une même bulle espacées temporellement de multiples de T. L'ensemble va apparaître fixe.

8. La bulle parcourt la distance $h_{n+1} - h_{n-1}$ en une durée égale à deux périodes $T = 1/f_b$. Ainsi, en assimilant vitesse moyenne et vitesse instantanée, on peut écrire :

$$v_n = \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2/f_b} \quad \text{soit} \quad \boxed{v_n = f_b\frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2} = 1,5 \text{ cm.s}^{-1}}$$

9. L'allure des bulles sur la photographie figure 1 n'est pas en accord avec l'hypothèse de vitesse constante : si c'était le cas, les positions successives seraient régulièrement espacées. L'expression établie précédemment de la vitesse limite montre qu'elle dépend du rayon de la bulle... or on constate sur la photographie que le rayon des bulles augmente lorsqu'elles remontent dans la flûte. C'est probablement cette variation de rayon qui est responsable des variations de vitesse.

10. On a montré précédemment que la vitesse limite valait :

$$v_{\text{lim}} = \frac{2r^2\rho_l g}{9\eta}$$

donc en prenant le logarithme décimal de cette expression, on obtient :

$$\log v_{\text{lim}} = \log \frac{2\rho_l g}{9\eta} + \log r^2$$

soit

$$\boxed{\log v_{\text{lim}} = A + 2\log r \quad \text{avec} \quad A = \log \frac{2\rho_l g}{9\eta}}$$

11. L'interprétation de la figure est plus délicate : il faut remarquer que les échelles n'y sont pas linéaires, c'est-à-dire que les graduations ne sont pas "régulièrement" espacées. Il s'agit en fait d'une échelle dite logartihmique, que nous introduirons dans le chapitre sur le filtrage. La courbe de la figure 2 représente donc en fait $\log v_{\text{lim}}$ en fonction de $\log r$. On peut alors constater que tous les points expérimentaux se regroupent sur une droite, dont on peut estimer la pente à environ 2. **Le modèle est donc cohérent avec l'expérience réalisée.**

Exercice n°2 : Oscillations d'un cube dans l'eau

12. Comme pour tout exercice de mécanique, il convient de préciser le système, le référentiel ainsi que le bilan des forces exercées sur le système.

▷ Système : le cube de masse constante m.

▷ Référentiel : terrestre supposé galiléen.

▷ Bilan des forces :

⇝ le poids $\vec{P} = mg\vec{k} = \rho_c a^3 g\vec{k}$, avec $\vec{k}$ le vecteur unitaire vertical orienté vers le bas.

⇝ la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A = -m_{\text{liquide}}g\vec{k} = -\rho_l a^2(h_{\text{éq}} + z)g\vec{k}$ où $h_{\text{éq}}$ est la hauteur immergée à l'équilibre.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi}_A$$

en projetant selon le vecteur unitaire $\vec{k}$, on obtient :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \rho_c a^3 g - \rho_l a^2(h_{eq} + z)g \quad \text{soit} \quad m\frac{d^2z}{dt^2} + \rho_l a^2 gz = \rho_c a^3 g - \rho_l a^2 h_{\text{éq}}$$

Lorsque le cube est à l'équilibre, on trouve $h_{\text{éq}} = \dfrac{\rho_c}{\rho_l}a$. On en déduit alors l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g\rho_l}{a\rho_c}z = 0}$$

13. On peut identifier la pulsation caractéristique des oscillations du cube dans l'équation précédente : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g\rho_l}{a\rho_c}}$. Les solutions s'écrivent alors :

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Conditions initiales : on lâche le cube d'une hauteur h_0, donc $A = h_0 - h_{\text{éq}}$. De plus, il n'y a pas de vitesse initiale donc $B = 0$. Ainsi, la solution s'écrit :

$$\boxed{z(t) = (h_0 - h_{\text{éq}})\cos(\omega_0 t)}$$

La période des oscillations quant à elle s'écrit :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a\rho_c}{g\rho_l}}}$$

14. Le cube bondit hors de l'eau si la base du cube atteint la surface de l'eau, c'est-à-dire si la valeur minimale de z vaut $-h_{\text{éq}}$, ce qui s'écrit

$$-(h_0 - h_{\text{éq}}) = -h_{\text{éq}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{h_0 > 2h_{\text{éq}}}$$