CHAPITRE 8 **Physique**
Thème *Ondes et signaux*

Régime sinusoïdal forcé

Plan du chapitre

Ce qu'il faut connaître

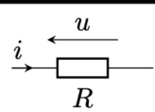
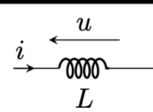
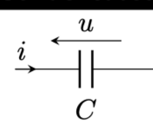
- ☐ La représentation temporelle d'un signal harmonique : amplitude, fréquence, pulsation, phase.
- ☐ La représentation complexe d'un signal harmonique.
- ☐ Relier une dérivée ou une intégrale temporelle au facteur complexe $j\omega$.
- ☐ La définition générale de l'impédance et de l'admittance complexe d'un dipôle.
- ☐ L'impédance et l'admittance de la résistance, du condensateur et de la bobine.
- ☐ Le comportement fréquentiel de la bobine et du condensateur.

Ce qu'il faut savoir faire

- ☐ Calculer simplement le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.
- ☐ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

☐ Savoir établir et résoudre une équation différentielle par la méthode complexe.
☐ Établir l'impédance d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur
☐ Exploiter le comportement fréquentiel de L ou C pour déduire le comportement d'un circuit.
☐ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
☐ Exploiter les ponts diviseurs en représentation complexe.
☐ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.

Synthèse sur les dipôles en RSF

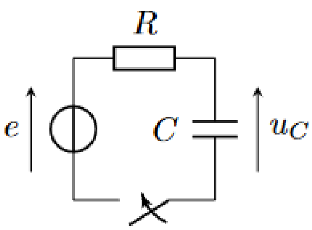
Propriété	Résistance	Bobine	Condensateur
Symbole normalisé			
Loi de comportement	$u = Ri$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
Loi de comportement en représentation complexe	$\underline{U} = R\underline{I}$	$\underline{U} = \mathrm{j}L\omega\underline{I}$	$\underline{U} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\underline{I}$
Impédance complexe	$\underline{Z_R} = R$	$\underline{Z_L} = \mathrm{j}L\omega$	$\underline{Z_C} = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}$
Admittance complexe	$\underline{Y_R} = \dfrac{1}{R}$	$\underline{Y_L} = \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}$	$\underline{Y_C} = \mathrm{j}C\omega$
Dipôle équivalent basse fréquence	Résistance R	Fil	Interrupteur ouvert
Dipôle équivalent haute fréquence	Résistance R	Interrupteur ouvert	Fil

I - Cadre d'étude

I.A - Analyse qualitative du circuit RC

On considère le circuit RC série représenté ci-dessous, où le générateur impose une tension $e(t)$ sinusoïdale telle que :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t\ +\ \phi)$$



où E_m désigne l'amplitude du signal et ϕ sa phase à l'origine. A l'instant initial $t = 0$, l'interrupteur est fermé. On suppose que le condensateur est initialement chargé, et on étudie la réponse du circuit $u_c(t)$ à ce forçage. La figure ci-dessous illustre cette réponse.

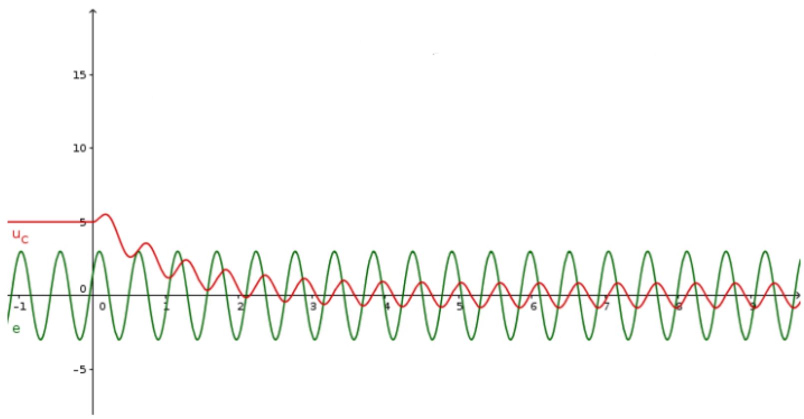


FIGURE 1 – Allure de $u_c(t)$ lorsque le circuit est soumis à un forçage sinusoïdal. On voit qu'après un régime transitoire, de durée $\tau = RC$ où les oscillations ne sont pas symétriques, $u_c(t)$ devient oscillante en régime permanent.

Lorsque le forçage est sinusoïdal, on voit donc que la solution particulière de l'équation différentielle n'est plus constante mais a tendance à suivre l'évolution du forçage.

I.B - Les difficultés de l'approche temporelle

Essayons de résoudre l'équation différentielle du circuit RC précédent soumis à un forçage sinusoïdal. L'équation différentielle se met sous la forme :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{E_m}{\tau} \cos(\omega t\ +\ \phi) \quad \text{avec} \quad \tau = RC \tag{1}$$

La solution générale se divise en deux parties, comme nous l'avons vu au chapitre 4 :

- ▷ Une solution **homogène**, de la forme $u_{c,h}(t) = A \exp -\frac{t}{\tau}$
- ▷ Une solution **particulière**, que l'on cherche a priori similaire au forçage, c'est-à-dire harmonique, de pulsation ω. Compte-tenu de la figure 1, l'amplitude de cette solution particulière ainsi que sa phase sont inconnues, on peut ainsi écrire la solution particulière $u_{c,p}(t)$ de la forme :

$$u_{c,p}(t) = U_m \cos(\omega t\ +\ \varphi)$$

On a donc :

$$\frac{du_{c,p}}{dt} = -\omega U_m \sin(\omega t \ + \ \varphi)$$

En remplaçant cette équation dans l'équation différentielle, on a alors :

$$-\omega U_m \sin(\omega t \ + \ \varphi) + \frac{U_m}{\tau}\cos(\omega t \ + \ \varphi) = \frac{E_m}{\tau}\cos(\omega t \ + \ \varphi)$$

A priori, résoudre cette équation est délicat, puisqu'elle fait intervenir trois fonction trigonométriques avec des préfacteurs différents. L'approche temporelle mène donc à une impasse calculatoire : il est certes possible de résoudre cette équation, mais nous allons introduire une notation plus commode qui nous permettra de grandement simplifier les calculs : la notation **complexe**.

II - Grandeurs en régime sinusoïdal forcé

II.A - Forme générale des grandeurs

On effectue ici des rappels succincts sur ce qui a été vu au chapitre 7 sur les signaux périodiques.

• Signal harmonique

En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont sinusoïdales, c'est pour cela que l'on utilise cette dénomination (que l'on abréviera parfois avec RSF).

Signal harmonique

Un signal sinusoïdal quelconque $x(t)$ s'écrit sous la forme générale :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t \ + \ \phi)$$

où X_m désigne l'amplitude du signal, ω sa pulsation et ϕ sa phase à l'origine.

On rappelle que pulsation, fréquence et période sont liées par les relations :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

• Différence de phase, ou déphasage

Deux signaux qui n'ont pas la même phase sont des signaux qui sont décalés temporellement l'un par rapport à l'autre : les maxima d'un signal ne sont pas superposés aux maxima du deuxième signal. Un exemple est donné figure 1, où l'on voit que $u_c(t)$ et $e(t)$ sont décalés l'un par rapport à l'autre. On dit qu'ils sont **déphasés**.

Déphasage

La **différence de phase** entre deux signaux $x_2(t)$ et $x_1(t)$, ou **déphasage**, noté $\Delta\phi$, s'écrit comme la différence entre la phase ces deux signaux :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = -2\pi\frac{t_2 - t_1}{T}$$

où Δt désigne le retard temporel du signal 2 sur le signal 1, et T sa période.

On distingue plusieurs cas particuliers de déphasage :

▷ Si $\Delta\phi = 0$, on dit que les signaux sont **en phase**.

▷ Si $\Delta\phi = \dfrac{\pi}{2}$, on dit que les signaux sont **en quadrature de phase**.

▷ Si $\Delta\phi = \pi$, on dit que les signaux sont **en opposition de phase**.

Si $\Delta\phi > 0$, cela signifie que le signal x_2 est en **avance de phase** sur le signal x_1. Si $\Delta\phi < 0$, cela signifie que le signal x_2 est en **retard de phase** sur le signal x_1. La figure ci-dessous illustre le déphasage entre deux signaux.

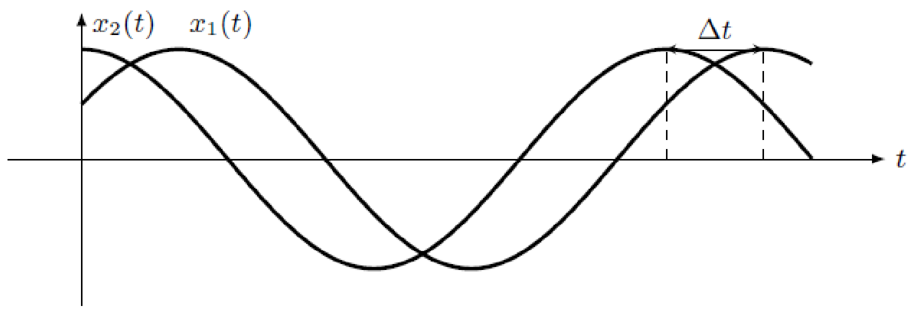


FIGURE 2 – Illustration du déphasage sur deux signaux $x_2(t)$ et $x_1(t)$. La différence de phase est ici positive, cela signifie que le signal x_2 est en avance de phase sur le signal x_1. On peut également le voir car x_2 passe en premier par son maximum.

II.B - La représentation complexe

• Définition

De manière générale, on peut associer à une grandeur sinusoïdale une grandeur complexe.

Signal complexe

On associe au signal réel $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ un signal complexe, noté $\underline{x}(t)$, de la forme :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad j^2 = -1$$

avec $\underline{X}_m = X_m e^{j\phi}$ l'amplitude complexe du signal.

▷ L'amplitude réelle du signal X_m est donnée par **le module** de $\underline{x}(t)$: $X_m = |\underline{X}_m|$

▷ La phase à l'origine du signal est donnée par **l'argument** de $\underline{x}(t)$: $\phi = \arg(X_m)$.

On pourra se référer à la fiche méthode **Nombres complexes en physique** pour les calculs.

Remarques : c'est la partie réelle du signal $\underline{x}(t)$ qui a un sens physique, la représentation complexe est simplement un outil mathématique commode pour étudier le régime sinusoïdal forcé, mais un générateur ne délivre pas de "signal complexe" : il délivre un signal $x(t)$, donné par :

$$x(t) = Re[\underline{x}(t)]$$

Exercice C1 : Notation complexe et notation temporelle

▷ Déterminer les amplitudes complexes associées aux grandeurs suivantes (sans dimension), puis préciser leurs modules et arguments.

a) $u(t) = 3\cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ b) $s(t) = -2\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$ c) $i(t) = 4\cos(\omega t + \frac{\pi}{8})$

• Dérivation

Reprenons l'expression du signal complexe donnée précédemment. En dérivant ce signal par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t} = j\omega \underline{x}(t)$$

Ainsi, la dérivation d'une grandeur complexe est aisée, puisqu'il suffit de multiplier cette grandeur par $j\omega$.

Dérivation d'une grandeur complexe

Soit un signal sinusoïdal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, dont le signal complexe associé est $\underline{x}(t)$. La dérivée de ce signal est :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$$

• Intégration

Si l'on souhaite intégrer le signal $\underline{x}(t)$ par rapport au temps, on obtient :

$$\int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\underline{X}_m e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)$$

Cette relation se généralise de la même manière que précédemment.

Intégration d'un signal complexe

Soit un signal sinusoïdal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, dont le signal complexe associé est $\underline{x}(t)$. L'intégrale de ce signal est :

$$\int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)$$

II.C - Résolution d'une équation différentielle par la méthode complexe

Ainsi, une équation différentielle pour des grandeurs sinusoïdales peut être transformée en équation algébrique pour les grandeurs complexes correspondantes, puis pour les amplitudes complexes (après simplification par $e^{j\omega t}$ dans tous les termes.

Reprenons l'équation différentielle du circuit RC de la première partie, en associant la grandeur complexe $\underline{u}_c(t)$ à la tension réelle aux bornes du condensateur $u_c(t)$. L'équation différentielle peut s'écrire :

$$\frac{d\underline{u}_c}{dt} + \frac{1}{\tau}\underline{u}_c = \frac{1}{\tau}\underline{e}(t) \quad \text{soit} \quad j\omega \underline{U}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{\tau}\underline{U}_m e^{j\omega t} = \frac{1}{\tau}\underline{E}_m e^{j\omega t}$$

En simplifiant par $e^{j\omega t}$ dans l'équation et en factorisant par $\underline{U}_m$, on obtient :

$$\underline{U}_m \left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\underline{E}_m$$

D'où finalement,

$$\underline{U}_m = \frac{\frac{1}{\tau}}{j\omega + \frac{1}{\tau}}\underline{E}_m = \frac{1}{1 + j\omega\tau}\underline{E}_m$$

L'amplitude réelle U_m et la phase ϕ de la tension u_c aux bornes du condensateur peuvent alors être déterminées respectivement par le module et la phase de $\underline{U}_m$.

Remarque : dans le cas où l'équation différentielle fait intervenir une dérivée seconde, comme dans le cas du circuit LC ou RLC, on multiplie par $(j\omega)^2$, soit $-\omega^2$.

Méthode : Résolution d'une E.D par la méthode complexe

- ▷ Remplacer les grandeurs réelles $x(t)$ par leurs représentations complexes associées $\underline{x}(t)$ dans l'E.D.
- ▷ Remplacer les dérivées premières par $j\omega\underline{x}$ et les dérivées secondes par $-\omega^2\underline{x}$.
- ▷ Simplifier l'équation par $e^{j\omega t}$.
- ▷ Factoriser d'un côté de l'équation par l'amplitude complexe $\underline{X}_m$ du signal d'intérêt.
- ▷ Exprimer l'amplitude complexe X_m en fonction des autres paramètres.
- ▷ Déterminer l'amplitude réelle $X_m = |\underline{X}_m|$ et la phase $\phi = \arg(\underline{X}_m)$.

Exercice C2 : Utilisation de la méthode complexe sur le circuit RC série

On considère un circuit RC série soumis à un forçage de la forme $e(t) = E_m \cos(\omega t + \phi)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur. On pourra reprendre l'équation (1).

- ▷ Exprimer l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur, $\underline{U}_m$, en fonction de $\underline{E}_m$.
- ▷ Exprimer $|\underline{U}_m|$ et $\arg(\underline{U}_m)$.
- ▷ En déduire $u(t)$.

III - Lois de l'électrocinétique en RSF

Grâce à la représentation complexe, nous allons pouvoir réécrire les lois de l'électrocinétique vues dans le chapitre 3, ainsi que les lois de comportement de la résistance, de la bobine et du condensateur. Nous allons pour cela introduire l'**impédance** d'un dipôle.

III.A - Notion d'impédance

• Définition

L'impédance d'un dipôle permet de généraliser la loi de comportement de ce dipôle dans le cas où les grandeurs utilisées sont des grandeurs complexes. C'est en fait une généralisation de la loi d'Ohm.

Impédance et admittance d'un dipôle

L'**impédance** $\underline{Z}$, exprimée en , d'un dipôle relie la tension $\underline{u}$ à ses bornes ainsi que l'intensité $\underline{i}$ le traversant, par la relation :

$$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$$

Il sera également utile parfois de travailler avec **l'admittance** d'un dipôle, notée $\underline{Y}$, telle que :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

L'admittance permet de généraliser la notion de conductance. Elle s'exprime donc en Siemens (S).

• Impédance des dipôles usuels

▷ Pour la résistance, l'impédance est simplement la résistance, puisque la loi d'Ohm s'écrit :

$$\underline{u} = R\underline{i} \iff u = Ri$$

Impédance du conducteur ohmique

L'impédance $\underline{Z}_R$ d'un conducteur ohmique de résistance R vaut :

$$Z_R = R \quad \text{et} \quad Y_R = \frac{1}{R}$$

▷ Pour le condensateur, l'impédance $\underline{Z}_C$ est donnée par :

$$\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega \times \underline{u} \quad \text{soit} \quad \underline{u} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i} = \underline{Z}_C \times \underline{i}$$

Impédance du condensateur

L'impédance $\underline{Z}_C$ et l'admittance $\underline{Y}_C$ d'un condensateur de capacité C valent :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Y}_C = jC\omega$$

▷ Pour la bobine, l'impédance $\underline{Z}_L$ est donnée par :

$$\underline{u} = L\frac{di}{dt} = jL\omega \times \underline{i} = \underline{Z}_L \times \underline{i}$$

Impédance de la bobine

L'impédance $\underline{Z}_L$ d'une bobine d'inductance L vaut :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$$

Remarques : on voit que pour la bobine et le condensateur, l'impédance est complexe : il faudra donc différencier le module de cette impédance, notée $|\underline{Z}|$ et l'argument de cette impédance $\arg(\underline{Z})$.

Exercice C3 : Module et argument des impédances usuelles

1. Calculer le module Z_0 de chacune des trois impédances.

2. Calculer l'argument de chacune de ces impédances.

• Comportement fréquentiel

On voit ainsi que l'impédance de la bobine et du condensateur dépendent de la pulsation ω, ce qui signifie que ces deux dipôles n'auront pas le même comportement à hautes et basses fréquences.

Comportement fréquentiel du condensateur

▷ À basses fréquences ($\omega \to 0$), le module $|\underline{Z}_C|$ de l'impédance du condensateur tend vers l'infini : le condensateur se comporte comme un **interrupteur ouvert** (intensité nulle).

▷ À hautes fréquences ($\omega \to \infty$), le module $|\underline{Z}_C|$ de l'impédance du condensateur tend zéro : le condensateur se comporte comme un **fil de connexion** (tension nulle).

Comportement fréquentiel de la bobine

▷ À basses fréquences ($\omega \to 0$), le module $|\underline{Z}_L|$ de l'impédance de la bobine tend vers zéro : la bobine se comporte comme un **fil de connexion** (intensité nulle).

▷ À hautes fréquences ($\omega \to \infty$), le module $|\underline{Z}_L|$ de l'impédance de la bobine tend vers l'infini : la bobine se comporte comme un **interrupteur ouvert** (intensité nulle).

III.B - Lois de l'électrocinétique

• Lois de Kirchoff

Les lois de Kirchoff (loi des noeuds et loi des mailles) sont toujours valables en régime sinusoïdal forcé, à condition d'utiliser les grandeurs complexes associées.

Lois de Kirchoff en RSF

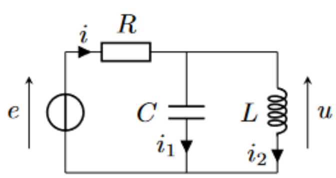
Les lois des noeuds et des mailles s'écrivent de la même façon qu'en régime continu, en utilisant les grandeurs complexes :

$$\text{sur un noeud,} \quad \sum_k \underline{i}_k = 0$$

$$\text{dans une maille,} \quad \sum_k \underline{u}_k = 0$$

Remarques : une méthode très fréquente pour étudier les circuits en RSF est d'utiliser la loi des nœuds, puis de se ramener aux tensions par l'intermédiaire des admittances complexes ($\underline{i} = \underline{Y}.\underline{u}$).

Exercice C3 : Utilisation des lois de Kirchoff en RSF



En appliquant la loi des nœuds, la loi des mailles et en utilisant les admittances complexes, exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ en fonction de $\underline{E}$, R, L, C et ω.

• Association de dipôles

Nous avons introduit précédemment la notion d'impédance, qui permet de généraliser la notion de résistance au régime sinusoïdal forcé. Au chapitre 3, nous avons vu les résistances équivalentes, résultantes de l'association série ou parallèle de résistances. Nous allons ainsi pouvoir généraliser cela au régime sinusoïdal forcé, avec la notion d'**impédance équivalente.**

Dipôles équivalents en RSF

Les lois d'association de dipôles sont valables en remplaçant R par $\underline{Z}$ et G par $\underline{Y}$.

▷ L'impédance complexe d'une association série est la somme des impédances complexes des différents dipôles, et ce quelle que soit leur nature.

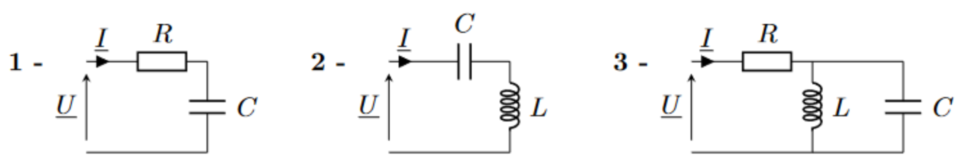
$$\text{En série,} \quad \underline{Z}_{\text{éq}} = \sum_k \underline{Z}_k$$

▷ L'admittance complexe d'une association parallèle est la somme des admittances complexes des différents dipôles, et ce quelle que soit leur nature.

$$\text{En parallèle,} \quad \underline{Y}_{\text{éq}} = \sum_k \underline{Y}_k$$

Exercice C4 : Détermination d'impédances équivalentes

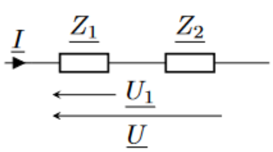
▷ Déterminer l'impédance complexe des dipôles ci-dessous. Écrire les résultats sous forme d'une unique fraction, en faisant apparaître des quantités adimensionnées telles que $RC\omega$, $\dfrac{L\omega}{R}$ et $LC\omega^2$.



• Ponts diviseurs

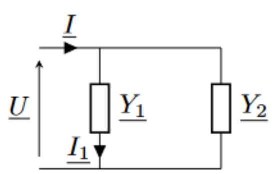
La généralisation des ponts diviseurs est immédiate grâce à ce qui a été donné plus précédemment.

▷ Pour le pont diviseur de tension, on a :



$$\begin{cases} \underline{U} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\,\underline{I} \\ \underline{U}_1 = \underline{Z}_1\,\underline{I} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,.}$$

▷ Pour le pont diviseur de courant, on a :



$$\begin{cases} \underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\,\underline{U} \\ \underline{I}_1 = \underline{Y}_1\,\underline{U} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\,.}$$

Ponts diviseurs en RSF

Les ponts diviseurs sont également applicables en RSF, à condition de remplacer les grandeurs électriques par leurs grandeurs complexes associées, et leurs résistances R par $\underline{Z}$.

▷ Pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_i = \frac{\underline{Z}_i}{\sum_k \underline{Z}_k}\underline{U}_{\text{ensemble}}$$

▷ Pont diviseur de courant :

$$\underline{I}_j = \frac{\underline{Y}_j}{\sum_k \underline{Y}_k}\underline{I}_{\text{ensemble}}$$

Exercice C5 : Application du pont diviseur de tension

On considère le même circuit qu'à l'exercice C3.

▷ En déterminant cette fois l'impédance équivalente à l'association LC puis en identifiant un pont diviseur, retrouver l'amplitude complexe $\underline{U}$.

III.C - Obtention d'une équation différentielle par la méthode complexe

Lorsqu'on dispose d'une équation complexe liant deux grandeurs, comme celle obtenue à l'exercice C5, on peut retrouver l'équation différentielle temporelle grâce à la méthode suivante.

Méthode : passage d'une équation complexe à une équation différentielle

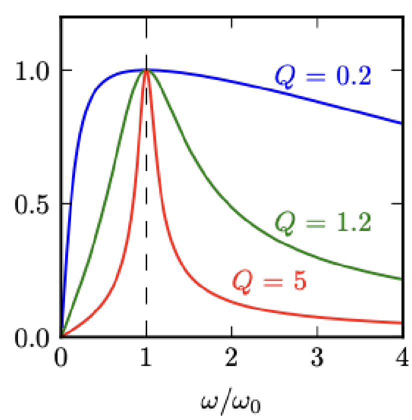
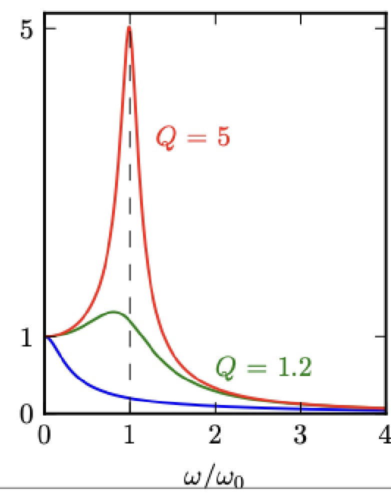
- ▷ On effectue un produit en croix pour avoir une égalité sans fraction.
- ▷ On remplace toute grandeur complexe multipliée par $j\omega$ par sa dérivée première.
- ▷ On remplace toute grandeur complexe multipliée par $-\omega^2$ par sa dérivée seconde.
- ▷ On repasse en écriture temporelle.

Exercice C6 : Obtention d'une E.D à partir de l'équation complexe

On considère le même circuit qu'à l'exercice C3.

▷ En partant de l'expression de $\underline{U}$ en fonction de $\underline{E}$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par u.

Synthèse sur les résonances

Exemple électronique Exemple mécanique	Résonance en intensité i Résonance en vitesse	Résonance en tension u_C Résonance en élongation
Existence	Toujours	$Q > 1/\sqrt{2}$
Pulsation de résonance Largeur de la résonance	ω_0 $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$	$\omega_{\text{res}} \lesssim \omega_0$ $\Delta\omega \simeq \dfrac{\omega_0}{Q}$
Aspects notables à $\omega = \omega_{\text{res}}$ Aspects notables à $\omega = \omega_0$	Maximum d'amplitude, Forçage et réponse en phase C'est la résonance !	Maximum d'amplitude, Aucune relation de phase Forçage et réponse en quadrature, Rapport des amplitudes égal à Q
Mesure de ω_0 Mesure de Q	Pulsation de résonance Largeur de la résonance	Quadrature de phase Rapport des amplitudes à ω_0 ou largeur de la résonance
Courbe de phase (à connaître)	$\lvert\underline{H}\rvert \,/\, \lvert\underline{H}\rvert_{\max}$ 	
Courbe de phase (pour information)