TD Régime sinusoïdal forcé

Vrai / Faux

1. L'admittance d'un condensateur s'écrit $jC\omega$.

Vrai ❒ Faux ❒

2. L'impédance d'une bobine s'écrit $jL\omega$.

Vrai ❒ Faux ❒

3. Lorsque la pulsation tend vers zéro, un condensateur se comporte comme un fil.

Vrai ❒ Faux ❒

4. Lorsque la pulsation tend vers zéro, une bobine se comporte comme un fil.

Vrai ❒ Faux ❒

5. Intégrer une fonction dans le domaine temporel revient à multiplier par $j\omega$ en complexe.

Vrai ❒ Faux ❒

Avec le cahier d'entraînement

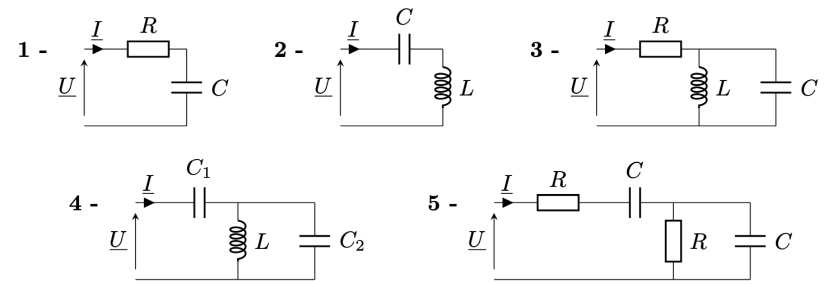
⇝ **Nombres complexes :** entraînement 5.1.

⇝ **Impédance équivalente :** entraînement 5.3, 5.4

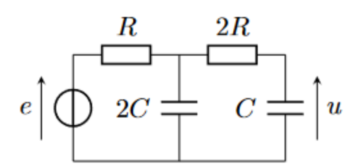
Pour bien démarrer

Exercice n°1 - Détermination d'impédances (★)

▷ Pour chaque circuit ci-dessous, déterminer l'impédance équivalente complexe. Écrire les résultats sous forme d'une unique fraction, en faisant apparaître des quantités adimensionnées telles que $RC\omega$, $L\omega/R$ et $LC\omega^2$.



Exercice n°2 - Obtention d'une équation différentielle (★)



En utilisant les complexes, montrer que la tension u est solution de l'équation différentielle :

$$4\tau^2\frac{d^2u}{dt^2}+5\tau\frac{du}{dt}+u=e$$

en posant $\tau = RC$.

Exercices essentiels (traités en TD)

Exercice n°3 - Résonance en intensité du circuit RLC (★★)

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de la résonance en intensité dans le circuit RLC série, identique à celui de la partie IV. B du cours. Expérimentalement, celle-ci peut s'étudier grâce à l'acquisition sur un oscilloscope de la tension aux bornes de la résistance, celle-ci étant égale (à R près), à l'intensité $i(t)$ du courant circulant dans le circuit. L'intensité peut se calculer grâce à la loi de comportement du condensateur :

$$\underline{i}(t) = jC\omega\underline{u}$$

1. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}$ en fonction des données du problème (on reprendra l'expression de $\underline{U}$ établie en IV.B du cours).

2. Montrer que l'amplitude réelle $I = |\underline{I}|$ s'écrit :

$$I = \frac{E/R}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}$$

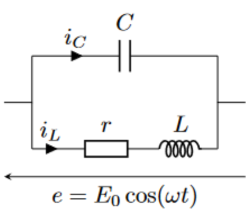
3. Étudier les variations de la fonction $h(x) = 1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$. En déduire qu'**il y a toujours résonance en intensité**, $\forall Q$, et qu'elle se produit à ω_0.

4. En utilisant judicieusement l'équation (1), montrer que le déphasage ϕ' de l'intensité s'écrit :

$$\phi'(x) = \frac{\pi}{2} + \phi(x)$$

où ϕ désigne le déphasage de la tension aux bornes du condensateur établie dans la partie IV.B du cours

Exercice n°4 - Circuit bouchon (★★)



Considérons un dipôle constitué d'une bobine (inductance L et résistance interne r) montée en dérivation avec un condensateur (capacité C). Il est alimenté par la tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω variable.

1. Exprimer l'impédance complexe Z_s d'un dipôle où r, L et C seraient montés en série, d'abord en fonction des composants puis de la résistance r, de la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et du facteur de qualité $Q = L\omega_0/r$.

2. Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle parallèle sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}\right)$$

3. Montrer que lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible ($\omega \gg \omega_0/Q$), l'impédance $\underline{Z}$ peut se mettre sous forme approchée

$$\underline{Z} \approx \frac{Q^2 r^2}{\underline{Z}_s}$$

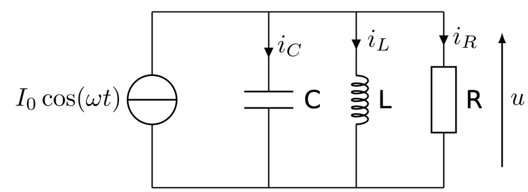
On se place dans ces hypothèses pour toute la suite de l'exercice.

4. Montrer que $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $\omega = \omega_0$. Quel est alors le comportement du circuit ? Justifier sa dénomination de *circuit bouchon*.

5. On se place à $\omega = \omega_0$. Déterminer en fonction de E_0, Q et r les intensités réelles $i_C(t)$ et $i_L(t)$ qui traversent respectivement le condensateur et la bobine. Commenter les résultats obtenus.

Exercice n°5 - Antenne émettrice (★★)

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0\cos(\omega t)$. On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.



1. Déterminer l'impédance complexe de l'association équivalente à l'antenne.

2. En déduire l'amplitude complexe de la tension u en fonction de ω, I_0 et des valeurs des composants.

3. Pour quelle pulsation l'amplitude U de u prend-elle sa valeur maximale notée $U_{\max}$? Conclure sur la fréquence à utiliser.

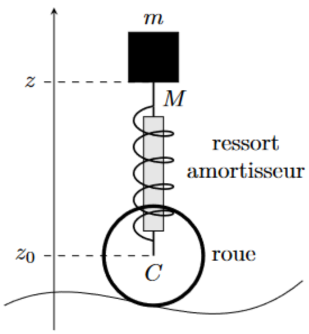
4. Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite x que l'on définira.

On se place dans le cas $R = 37\Omega$, $L = 1,2 \times 10^{-8}$ H et $C = 2,3 \times 10^{-10}$ F.

5. Caractériser quantitativement l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance (donner son expression et sa valeur). Interpréter sa dépendance en R.

6. Quel est le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$? Comment varie-t-il avec la pulsation réduite ?

Exercice n°6 - Suspension de VTT (★★)



Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT. Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M, posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte. La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_0 sur un axe vertical (Oz) ascendant tel que $z_0 = 0$ correspond à la position moyenne du chemin. Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α.

L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force

$$\vec{F}_a = -\alpha(v_z - v_{z0})\vec{u}_z$$

où $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ et v_0 la vitesse initiale sont les vitesses verticales respectives de M et C. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

1. Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_0 = 0$, et la cote z est constante, de valeur z_e, en régime dit stabilisé. Déterminer z_e en fonction de m, g, k et L_0.

2. Considérons maintenant le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. On pose $Z(t) = z(t) - z_e$. Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$m\frac{d^2Z}{dt^2} + \alpha\frac{dZ}{dt} + kZ = F(t)$$

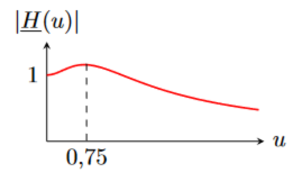
   où $F(t)$ est une fonction à déterminer, dépendant de z_0, de v_0 et des constantes α et k caractéristiques de la suspension. Préciser le sens physique de F.

3. On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude F_m et de pulsation ω. Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale du VTT est également sinusoïdale de même pulsation que F. Calculer son amplitude V_m en fonction de F_m.

4. On introduit la **fonction de transfert** de la suspension est définie par $\underline{H} = \dfrac{\underline{Z}}{\underline{z}_0}$, et on introduit les paramètres

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \quad \text{et} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

   Que représente physiquement $\underline{H}$? Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u.



Pour un VTT se déplaçant à la vitesse (horizontale !) V sur un chemin fait de cailloux de taille typique l, le spectre d'excitation est maximal autour de $\omega = 2\pi V/l$. La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$.

5. Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.

Éléments de réponse

Vrai / Faux

1. Vrai 2. Vrai 3. Faux 4. Vrai 5. Faux

Exercice n°1

1. $\underline{Z} = \dfrac{1 + jRC\omega}{jRC\omega}R$ **2.** $\underline{Z} = \dfrac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}$ **3.** $\underline{Z} = \dfrac{1 + jL\omega/R - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2}R$

4. $\underline{Z} = \dfrac{1 - L(C_1 + C_2)\omega^2}{jC_1\omega(1 - LC_2\omega^2)}$ **5.** $\underline{Z} = \dfrac{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}{jC\omega(1 + jRC\omega)}$

Exercice n°3

1. En série, les impédances s'ajoutent : $\underline{Z}_S = r\left[1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$

2. Les dipôles sont en parallèle, on somme les admittances, on factorise par r au numérateur et par $jC\omega$ au dénominateur.

4. Pour $\omega = \omega_0$, on trouve que $\underline{Z} = Q^2r$, équivalent à une résistance qui peut être très élevée, d'où le nom de circuit bouchon.

5. $i_c(t) = \dfrac{E_0}{rQ}\cos(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2})$ et $i_L(t) = \dfrac{E_0}{rQ}\cos(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2})$

Exercice n°4

Il faut écrire la loi des noeuds puis utiliser les admittances des dipôles. Grâce à une loi des mailles, en identifiant $\tau = RC$ puis en replaçant les $j\omega$ par des dérivées premières, on trouve l'équation demandée.

Exercice n°5

1. $\underline{Z} = \dfrac{jRL\omega}{jL\omega + R - RLC\omega^2}$

2. $\underline{U_0} = \dfrac{RI_0}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$

3. U est maximale quand $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

4. $U = \dfrac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$

5. $A_c = Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. L'acuité augmente avec la résistance. C'est normal car la résistance est en parallèle avec le reste du circuit, donc une absence de résistance signifie ici une résistance R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

6. $\varphi = -\arctan\left(Q(x - \dfrac{1}{x})\right)$

Exercice n°6

1. $z_e = L_0 - mg/k$.

2. On trouve $F = kz_0 + \alpha v_{z,0}$. F s'interprète comme une force verticale ressentie par le cadre en raison du caractère non plat du chemin. Vous avez tous déjà ressenti cet effet en voiture, par exemple en passant sur un dos d'âne.

3. On utilise la représentation complexe pour déterminer son amplitude : $\underline{F} = F_m e^{j\omega t}$ et $\underline{v_z} = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$.

On trouve $V_m = |\underline{v_z}| = \dfrac{F_m}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}}$

4. $\underline{H}$ est une fonction de transfert mécanique. Elle représente la façon dont les oscillations du chemin (via z_0) se répercutent sur le cadre (via $\underline{Z}$) par l'intermédiaire de la suspension, et sont donc ressenties par le vététiste. On sait que $v_z = j\omega\underline{Z}$ et $F = kz_0 + j\omega\alpha z_0$, on obtient alors en remplaçant :

$$\underline{H} = \frac{1 + 2j\xi u}{1 - u^2 + 2j\xi u}$$

5. Pour ressentir le moins possible les vibrations dues aux cailloux, il faut que $|\underline{H}|$ soit aussi petit que possible, et éviter absolument la situation de résonance. D'après la figure, cela correspond à $u \gg 1$, soit une pulsation ω élevée, donc à une vitesse élevée. Pour minimiser les vibrations, il faut donc rouler aussi vite que possible sur les cailloux. Évidemment, il en va tout autrement de l'adhérence !