I - Analyse qualitative de l'enregistrement

1. La présence de modes propres dans le signal est liée au fait que le signal est non sinusoïdal : il est donc riche en harmoniques. Le premier pic dans le spectre du signal correspond au **fondamental**, et les autres correspondent aux **harmoniques**.

2. La fréquence du signal est celle du fondamental, soit $\boxed{f_0 = 545\text{Hz}}$.

3. On peut également lire sur le spectre la fréquence des modes propres (harmoniques) :

- ▷ $f_2 = 1090$ Hz;
- ▷ $f_3 = 1640$ Hz;
- ▷ $f_4 = 2180$ Hz;

La relation est donc simple : $\boxed{f_n = nf_0}$

4. La courbe de réponse du microphone est compatible avec le gain d'un filtre passe-haut de fréquence de coupure 10 kHz : il laisse donc passer les fréquence d'intérêt. Le gain est également constant dans la gamme des fréquences audibles (environ 0,1kHz - 10kHz).

II - Mise en équation

5. On applique le PFD à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} + \vec{f}$$

soit, par projection selon $\vec{u}_x$, sachant que la longueur à vide du ressort est nulle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha\frac{dz}{dt}$$

soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{km}}$$

6. ω_0 désigne la **pulsation propre** de l'oscillateur (en rad/s) et Q le **facteur de qualité** du système (sans unité).

7. L'équation caractéristique de cette équation différentielle s'écrit :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant s'écrit donc $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$. L'amortissement est faible ce qui signifie que le facteur de qualité est grand : dans ce cas, $\Delta < 0$, le régime d'évolution est **pseudo-périodique**. La solution s'écrit ainsi :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

avec Ω la pseudo-pulsation : $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Les conditions initiales sont telles que :

- ▷ $x(0) = 0 \iff A = 0$
- ▷ $v(0) = V_0 \iff B = \frac{V_0}{\Omega}$

Finalement, la solution $x(t)$ s'écrit :

$$\boxed{x(t) = \frac{V_0}{\Omega}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\Omega t)}$$

L'allure de $x(t)$ est donnée sur la figure 1.

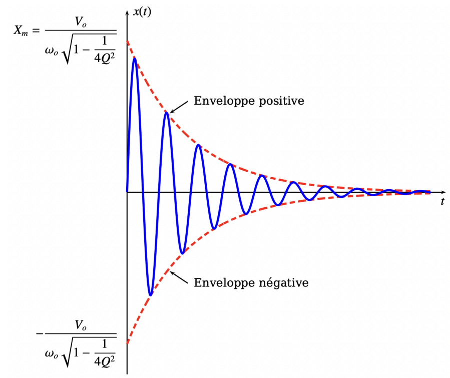

Figure 1: Allure du déplacement $x(t)$ du verre

8. Puisque l'amplitude décroît exponentiellement, la modélisation par un frottement fluide est cohérente.

9. Le temps caractéristique du régime transitoire est donné par le facteur dans l'exponentielle, soit $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$. On peut calculer ω_0 grâce à f_0, la fréquence du fondamental déterminée à la partie I. On a alors :

$$\boxed{\tau = \frac{Q}{\pi f_0} \approx 0,64\text{s}}$$

Par lecture graphique, on voit que le temps du régime transitoire est de l'ordre de la seconde, ce qui est cohérent avec le calcul effectué.

III - Étude en RSF

10. $\underline{X}$: amplitude complexe de $x(t)$. Ici, $\underline{X} = Xe^{j\phi}$.

- ▷ Module : $|\underline{X}|$: amplitude réelle X
- ▷ Argument : $\arg(\underline{X})$: phase à l'origine de $x(t)$.

11. On peut passer l'équation différentielle précédente en complexe.

En identifiant la dérivée première par $j\omega$ et la dérivée seconde par $-\omega^2$, on obtient :

$$\underline{X}\left(-\omega^2 + \omega_0^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right) = A_0$$

soit

$$\boxed{\underline{X} = \frac{A_0}{-\omega^2 + \omega_0^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}}$$

12. On calcule le module de $\underline{X}$:

$$\boxed{X = |\underline{X}| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

13. On peut calculer les limites à hautes et basses fréquences afin de procéder par élimination :

- ▷ Quand $\omega \to 0$, $X \to \frac{A_0}{\omega_0^2}$, non nul. On élimine donc le graphe 1 et le graphe 3.
- ▷ Quand $\omega \to \infty$, $X \to 0$. On élimine donc le graphe 4.

C'est donc le **graphe n°3** qui est compatible avec l'expression de X.

14. On a une résonance en amplitude si $\frac{dX}{d\omega} = 0$. Cette condition implique :

$$\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{2Q^2} = 0$$

La résonance se produit donc à une pulsation $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$, uniquement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\boxed{\mathrm{Q}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

15. Étant donné la valeur de Q donnée précédemment, on peut approximer le terme sous la racine par 1. La pulsation de résonance est donc ω_0.

16. On trouve directement :

$$\boxed{X(\omega = \omega_0) = \frac{A_0 Q}{\omega_0}}$$

17. Les pulsations de coupure sont telles que :

$$\boxed{X(\omega_{1,2}) = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{A_0 Q}{\sqrt{2}\omega_0}}$$

18. Par lecture graphique, on peut trouver la fréquence de résonance pour le maximum d'amplitude :

$$\boxed{\mathrm{f}_r = 539,6\text{Hz}}$$

Et le facteur de qualité se calcul grâce à la relation donnée dans l'énoncé, et la lecture graphique des pulsations de coupure :

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f} \approx 2,7.10^3}$$

19. Il est alors possible de briser un verre avec la voix, puisqu'il est possible que la Castafiore émette un son de fréquence f_0 ! Il faut toutefois que la fréquence de la voix soit très proche de la fréquence de résonance, puisque la bande passante du verre est extrêmement faible (0,2 Hz) : si la fréquence n'est pas dans la bande passante, la résonance ne sera pas suffisante pour briser le verre.