Exercice n°1 - Détermination d'impédances (★)

1. Association série d'impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_c} = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{Z} = R\frac{1+jRC\omega}{jRC\omega}}$$

2. Association série, d'impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_C} + \underline{Z_L} = \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{Z} = \frac{1-LC\omega^2}{jC\omega}}$$

où l'on a utilisé $1/j = -j$.

3. L'association de L et C est en parallèle, il est donc a priori plus simple de calculer son admittance équivalente

$$\underline{Y_{LC}} = \underline{Y_L} + \underline{Y_C} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1-LC\omega^2}{jL\omega}$$

L'impédance complexe de l'association parallèle vaut donc

$$\underline{Z_{LC}} = \frac{1}{\underline{Y_{LC}}} = \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$$

Enfin, l'association est montée en série avec une résistance, donnant une impédance complexe équivalente à l'ensemble

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_{LC}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{Z} = R + \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}}$$

4. L'association en parallèle de la bobine et du condensateur C_2 se traite comme à la question précédente et a pour impédance équivalente

$$\underline{Z_{LC_2}} = \frac{jL\omega}{1-LC_2\omega^2}$$

Elle est montée en série avec le condensateur C_1, donnant une impédance équivalente

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{jL\omega}{1-LC_2\omega^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\underline{Z} = \frac{1-L(C_1+C_2)\omega^2}{jC_1\omega(1-LC_2\omega^2)}}$$

5. L'association en parallèle de la résistance et du condensateur a pour admittance équivalente

$$\underline{Y_{//}} = \frac{1+jRC\omega}{R} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z_{//}} = \frac{R}{1+jRC\omega}$$

Cette association est montée en série avec une résistance et un condensateur, l'ensemble a donc comme impédance équivalente

$$\underline{Z} = \underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_{//}} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1+jRC\omega}$$

soit enfin

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1+3jRC\omega-(RC\omega)^2}{jC\omega(1+jRC\omega)}}$$

Exercice n°2 - Obtention d'une équation différentielle (★)

Raisonnons à partir de la figure 1 ci-dessous.

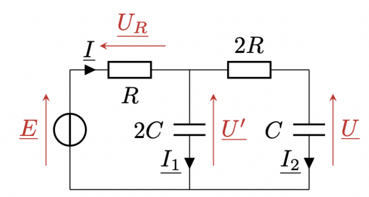


Figure 1: Schéma des notations

D'après la loi des noeuds,

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$

et en utilisant les admittances,

$$\frac{\underline{U_R}}{R} = 2jC\omega\underline{U'} + jC\omega\underline{U}$$

Pour limiter les fractions on multiplie directement par R,

$$\underline{U_R} = 2j\omega\tau\underline{U'} + j\omega\tau\underline{U}$$

D'après la loi des mailles dans la maille de droite,

$$\underline{U'} = \underline{U} + 2R\underline{I_2} = \underline{U} + 2jRC\omega\underline{U}$$

et dans la maille de gauche

$$\underline{U_R} = \underline{E} - \underline{U'} = \underline{E} - \underline{U} - 2jRC\omega\underline{U}$$

En regroupant et en identifiant $RC = \tau$,

$$\underline{E} - \underline{U} - 2jRC\omega\underline{U} = 2j\omega\tau(\underline{U} + 2j\omega\tau\underline{U}) + j\omega\tau\underline{U}$$

soit

$$\underline{E} = \underline{U} + 5j\omega\tau\underline{U} + 4\tau(j\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de $j\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on aboutit à

$$\boxed{e = u + 5\tau\frac{du}{dt} + 4\tau^2\frac{d^2u}{dt^2}}$$

ce qui est effectivement le résultat attendu.

Exercice n°4 - Circuit bouchon (★)

1. Les impédances s'ajoutent en série :

$$\underline{Z_s} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

En factorisant par r,

$$\underline{Z_s} = r\left(1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}\right)$$

À partir des expressions données de Q et ω_0, on identifie

$$\boxed{\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{L\omega_0^2}{r} = \frac{L}{rLC} = \frac{1}{rC}}$$

2. En sommant les admittances montées en parallèle,

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{r + jL\omega} = \frac{1 + jC\omega(r + jL\omega)}{r + jL\omega}$$

d'où

$$\underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{1 + jC\omega(r + jL\omega)}$$

Factorisons par r au numérateur et par $jC\omega$ au dénominateur :

$$\underline{Z} = \frac{r\left(1 + \frac{jL\omega}{r}\right)}{jC\omega\left(\frac{1}{jC\omega} + r + jL\omega\right)}$$

On en déduit directement la forme cherchée, en identifiant avec l'expression de $\underline{Z_s}$ trouvée précédemment :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z_s}}\left(1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}\right)}$$

3. Compte tenu des hypothèses,

$$1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0} \simeq \frac{jQ\omega}{\omega_0}$$

donc

$$\underline{Z} \simeq \frac{jrQ\omega}{jC\omega\omega_0\underline{Z_s}} = \frac{rQ}{C\omega_0\underline{Z_s}}$$

Or on a montré à la question 1 que $Q\omega_0 = 1/rC$ donc $C\omega_0 = 1/rQ$. Ainsi,

$$\boxed{\underline{Z} \simeq \frac{Q^2r^2}{\underline{Z_s}}}$$

4. D'après la question précédente, —$\underline{Z}$— est maximal lorsque $|\underline{Z_s}|$ est minimal. Or d'après la question 1,

$$|\underline{Z_s}| = r\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Ainsi $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque le terme entre parenthèses est nul, soit pour $\omega = \omega_0$. À cette pulsation, $|\underline{Z_s}| = r$, et ainsi

$$\boxed{\underline{Z} = Q^2r}$$

Le dipôle est donc équivalent à une résistance $Q^2r \gg r$ qui peut être très élevée : le circuit bloque le passage du courant, d'où la dénomination de circuit bouchon.

Pour des ordres de grandeurs accessibles en TP, la résistance interne d'une bobine est de l'ordre de quelques dizaines d'ohms et le facteur de qualité atteint sans problème 20. On obtient donc une résistance effective de plusieurs dizaines de kiloohms.

Exercice n°5 - Antenne émettrice (★)

1. On regroupe la résistance, la bobine et le condensateur, qui sont tous les trois en parallèles, en une impédance équivalente $\underline{Z}$ donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = \frac{jL\omega + R + (jC\omega)R(jL\omega)}{jLR\omega}$$

D'où

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}}$$

2. On a la relation $\underline{U_0} = \underline{Z} \times \underline{I_0} = \underline{Z} \times I_0$ (car il n'y a pas de phase à l'origine), donc

$$\underline{U_0} = I_0 \frac{jRL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

Pour la suite, il est plus judicieux de tout diviser par $jL\omega$ afin de retrouver une fonction du type de celle pour le RLC série

$$\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}}$$

3. On a :

$$U = |\underline{U_0}| = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}$$

Il faut chercher le maximum. Il est atteint lorsque le dénominateur est minimal (car pas de ω au numérateur). C'est ici assez simple : c'est lorsque $(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2 = 0$, donc pour $\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$. C'est donc cette pulsation là qu'il faut utiliser.

4. On définit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $x = \omega/\omega_0$. On peut alors montrer que :

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = \sqrt{\frac{C}{L}} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

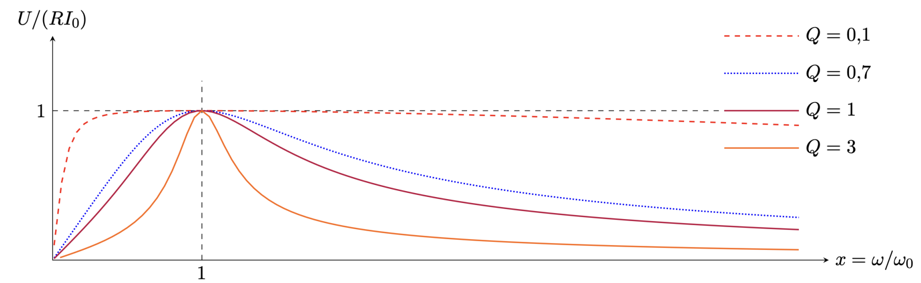
D'où

$$\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + jR\sqrt{\frac{C}{L}}(x - \frac{1}{x})}$$

On pose $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$. On a :

$$U = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

Le tracé de U (normalisé par rapport à RI_0) donne :



5. Il faut trouver l'expression des pulsations de coupures ω_{c1} et ω_{c2}. On note $x_1 = \omega_{c1}/\omega_0$ et $x_2 = \omega_{c2}/\omega_0$ les pulsations réduites correspondantes. Elles sont solutions de :

$$U(x) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}}$$

Ceci est équivalent à $Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$, soit tous calculs faits et en éliminant les solutions négatives,

$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$$

La largeur de la bande passante est $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$ soit encore $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

L'acuité de la résonance s'écrit :

$$\boxed{A_c = Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 5,2}$$

L'acuité augmente avec la résistance. C'est normal car la résistance est en parallèle avec le reste du circuit, donc une absence de résistance signifie ici une résistance R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

6. Le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$ est donné par l'argument de $\underline{U_0}$. On obtient :

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)}$$

Remarque : le déphasage φ est nul à la résonance. $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase.

Exercice n°6 - Suspension de VTT (★)

Tout au long de l'exercice, le système étudié est l'ensemble du cadre et du vététiste, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. Ce système est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$, à la force $\overrightarrow{F_r}$ de rappel du ressort de la suspension et à la force $\overrightarrow{F_a}$ exercée par l'amortisseur.

1. Comme $z = z_e$ et $z_0 = 0$ sont des constantes, l'amortisseur n'exerce aucune force sur le vététiste, et la longueur du ressort est égale à z. La position d'équilibre est celle où la force exercée par le ressort sur M compense exactement le poids du VTT, soit

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{0} \quad \text{soit} \quad -mg\overrightarrow{u_z} - k(z_e - l_0)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$$

D'où

$$\boxed{z_e = L_0 - \frac{mg}{k}}$$

Le ressort est plus court qu'à vide, ce qui est logique à cause du poids du vélo et du vététiste.

2. Appliquons la deuxième loi de Newton au cadre du VTT dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et aux forces exercées par le ressort et l'amortisseur. Ainsi,

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F_r}$$

Soit, après projection selon $\overrightarrow{u_z}$ remplaçant z par $Z + z_e$ (donc les dérivées de Z sont égales aux dérivées de z, car z_e est une constante), on obtient

$$m\frac{d^2Z}{dt^2} + \alpha\frac{dZ}{dt} + kZ = -mg - k(z_e - z_0) + kL_0 - \alpha v_{z0}$$

ce qui donne en remplaçant z_e par son expression

$$\boxed{m\frac{d^2Z}{dt^2} + \alpha\frac{dZ}{dt} + kZ = F \quad \text{avec} \quad F = kz_0 + kv_{z0}}$$

F s'interprète comme une force verticale ressentie par le cadre en raison du caractère non plat du chemin. Vous avez tous déjà ressenti cet effet en voiture, par exemple en passant sur un dos d'âne.

3. Le VTT est en mouvement forcé, par un forçage F sinusoïdal. Une fois le régime permanent atteint, ce qui est implicitement supposé, toutes les grandeurs dynamiques sont sinusoïdales de même pulsation que le forçage, et en particulier la vitesse v_z. On utilise la représentation complexe pour déterminer son amplitude :

$$F = F_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{v_z} = V_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

et comme $v_z = \frac{dZ}{dt}$, $\underline{v_z} = j\omega\underline{Z}$. Passons l'équation différentielle obtenue en représentation complexe,

$$-m(j\omega)^2\underline{Z} + j\omega\alpha\underline{Z} + k\underline{Z} = \underline{F} \quad \text{d'où} \quad mj\omega\underline{v_z} + \alpha\underline{v_z} + \frac{k}{j\omega}\underline{Z} = \underline{F}$$

Donc

$$\underline{v_z} = \frac{\underline{F}}{\alpha + jm\omega - \frac{jk}{\omega}}$$

L'amplitude de la vitesse est au final

$$V_m = |\underline{v_z}| = \frac{F_m}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}}$$

4. $\underline{H}$ est une fonction de transfert mécanique. Elle représente la façon dont les oscillations du chemin (via $\underline{z_1}$) se répercutent sur le cadre (via $\underline{Z}$) par l'intermédiaire de la suspension, et sont donc ressenties par le vététiste. Comme $\underline{v_z} = j\omega\underline{Z}$ et $F = kz_0 + j\omega\alpha z_0$, on obtient en remplaçant

$$j\omega\underline{Z} = \frac{k\underline{z_0} + j\alpha\omega\underline{z_0}}{\alpha + jm\omega - \frac{jk}{\omega}} \quad \text{donc} \quad \underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{\underline{z_0}}} = \frac{k + j\alpha\omega}{\alpha + jm\omega - \frac{jk}{\omega}}$$

En utilisant $\alpha = 2\xi\sqrt{mk}$ et en divisant numérateur et dénominateur par k, on aboutit à

$$\boxed{\underline{H}(u) = \frac{1 + 2j\xi u}{1 - u^2 + 2j\xi u}}$$

5. Pour ressentir le moins possible les vibrations dues aux cailloux, il faut que $|\underline{H}|$ soit aussi petit que possible, et éviter absolument la situation de résonance.

D'après la figure, cela correspond à $u \gg 1$, soit une pulsation ω élevée, donc à une vitesse élevée. Pour minimiser les vibrations, il faut donc rouler aussi vite que possible sur les cailloux. Évidemment, il en va tout autrement de l'adhérence !