Devoir surveillé de physique n°3

(Durée : 4 heures)

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte 8 pages, et est composé de deux parties indépendantes.

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

⋆ ⋆ ⋆

Données :

▷ Champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81$ m.s^{-2}

▷ La force de rappel exercée par un ressort s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -k(l(t) - l_0)\overrightarrow{u}_{\text{sortant}}$$

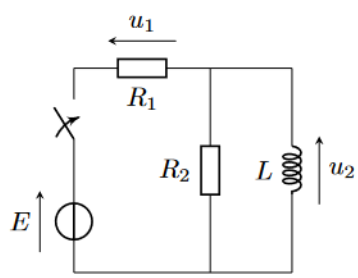
où k désigne la raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide et $l(t)$ son allongement instantané.

▷ **Notation complexes :** pour une fonction $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$, on notera :

$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t+\phi)} = X_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = \underline{X} e^{j\omega t}$.

Première partie : Circuit RL à deux mailles

Considérons le circuit ci-dessous, dans lequel l'interrupteur, ouvert depuis très longtemps, est fermé à $t = 0$. Le générateur est supposé idéal.



1. Déterminer les valeurs asymptotiques de u_1 et u_2 (valeurs en régime permanent).

2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par u_2 s'écrit :

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{\tau} u_2 = 0$$

   où l'on exprimera τ en fonction de L, R_1 et R_2.

3. Déterminer les valeurs à $t = 0^-$ et $t = 0^+$ des tensions u_1 et u_2.

4. Résoudre l'équation différentielle pour obtenir l'expression de u_2 ppur $t > 0$.

5. Tracer l'allure de $u_2(t)$. Identifier sur la courbe le régime transitoire et le régime permanent.

6. Calculer le temps t_{10} au bout duquel la tension u_2 est divisée par 10.

7. On mesure $t_{10} = 3{,}0$ ms pour $R_1 = 1{,}0$ kΩ et $R_2 = 5{,}0.10^2$ Ω. En déduire (sans calculatrice) la valeur de L, sachant que $1/\ln(10) \approx 0{,}43$.

Seconde partie : Suspension d'un véhicule

Adapté du concours CCP 2013 (filière TSI)

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

▷ à améliorer le confort des occupants ;

▷ à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;

▷ à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu, les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement. Le but de ce problème est d'étudier certaines caractéristiques des suspensions à ressort. En particulier, nous étudierons les mouvements verticaux du véhicule dans différentes situations : véhicule non amorti, véhicule amorti en régime libre, véhicule se déplaçant sur un sol non plat... Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$.

Hypothèses : tout au long du problème, on considérera que :

▷ l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule

▷ l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve à tout instant en contact avec le sol ;

▷ les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle de sorte qu'elle suit parfaitement le profil de la route, y compris lorsque le sol n'est pas plat.

I. Suspension sans amortissement

Le véhicule à vide (masse suspendue) est assimilé à une masse m = $1{,}0.10^3$ kg. La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable de raideur $k = 1{,}0.10^5$ N/m et de longueur au repos l_0. Dans cette première partie on néglige tout amortissement. On ne s'intéresse qu'au mouvement de translation verticale du véhicule. La position du véhicule est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical ascendant muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}_z$ (figure 1 ci-dessous).

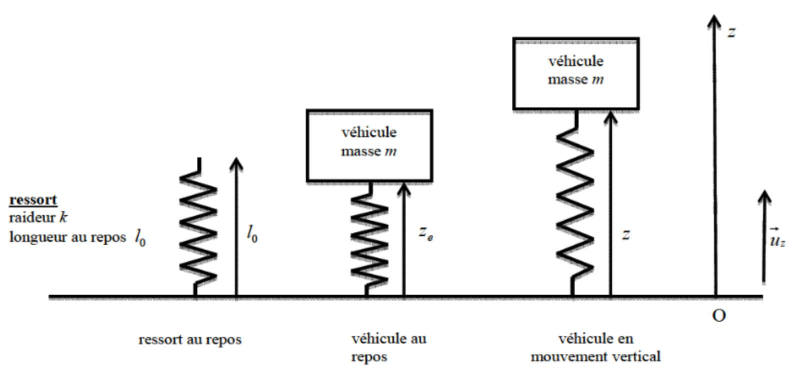


Figure 1: Suspension sans amortissement

$z(t)$ représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort. À l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_e.

8. Faire le bilan des forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme.

9. Écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre, et en déduire que la la position d'équilibre de la masse z_e est donnée par :

$$z_e = L_0 - \frac{mg}{k}$$

10. Établir l'équation différentielle sur la côte $z(t)$ et montrer qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \beta$$

où l'on exprimera ω_0 et β en fonction de z_e, k, et m.

11. Donner la solution générale de l'équation différentielle du mouvement en prenant comme paramètre d'étude ω_0 et z_e. Calculer la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0.

12. On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 où $z_0 < z_e$. À un instant $t = 0$, choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer $z(t)$ en fonction de t, z_e, ω_0 et z_0.

13. Exprimer $z(T_0/4)$, $z(T_0/2)$, $z(3T_0/4)$ et $z(T_0)$. Tracer l'allure de $z(t)$, faire apparaître sur le graphe les cotes minimales $z_{\min}$, maximale $z_{\max}$ et moyenne z_{moy} ainsi que la période propre T_0. Donner les expressions des cotes minimale, maximale et moyenne en fonction de z_e et z_0.

II. Suspension avec amortissement

On suppose que la suspension décrite dans la partie précédente comporte maintenant un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m, une force d'amortissement visqueux donnée par $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h un coefficient appelé coefficient de frottement fluide (figure 2).

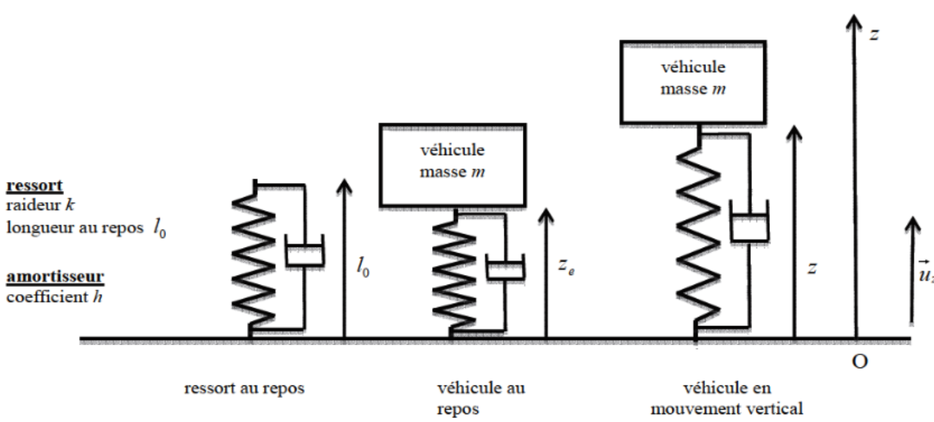


Figure 2: Suspension avec amortissement

14. Quel est l'unité de h dans le système international ?

15. Faire le bilan des forces appliquées au véhicule hors d'équilibre. On détaillera clairement chaque force en indiquant sa direction, son sens et sa norme. Écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est l'équilibre.

16. Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Mettre cette équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$$

où l'on exprimera Q et ω_0 en fonction de h, m et k.

17. Donner l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle. À quelle condition sur Q la suspension se trouve-t-elle en régime apériodique ? Même question pour le régime pseudo-périodique.

18. En déduire les conditions portant sur les paramètres m, k et h pour que la suspension se trouve respectivement dans les régimes apériodique et pseudo-périodique.

    (a) Si l'amortissement est tel que la suspension se trouve en régime critique lorsque le véhicule est à vide, dans quel régime se trouve-t-il lorsque le véhicule est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

    (b) Dès lors, comment choisir la valeur de l'amortissement pour que le véhicule ne soit pas en régime pseudo-périodique même lorsqu'il est en charge ? Justifier qualitativement la réponse.

Le véhicule se déplace maintenant sur un sol non plat. La position du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 3). Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol.

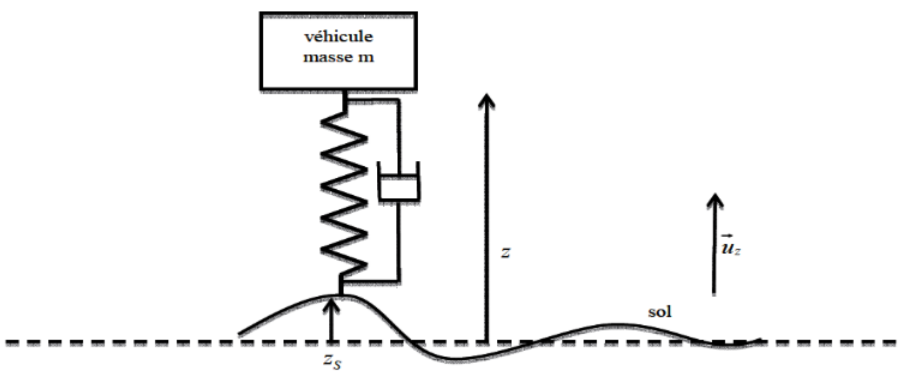


Figure 3: Véhicule sur un sol non plat de profil quelconque

Dans cette question, le véhicule se déplace sur une route telle que :

- ▷ $t < t_1$: $z_s(t) = z_1$ où z_1 est une constante positive et $t_1 > 0$.
- ▷ $t < t_1$: $z_s(t) = 0$.

Pour illustrer la situation, on pourra imaginer qu'à l'instant t_1 le véhicule descend d'un trottoir de hauteur z_1 et rejoint une route plane et horizontale de côte nulle.

19. On considère que pour $t < t_1$, la cote $z(t)$ du véhicule est constante c'est à dire que le véhicule se déplace en régime permanent.

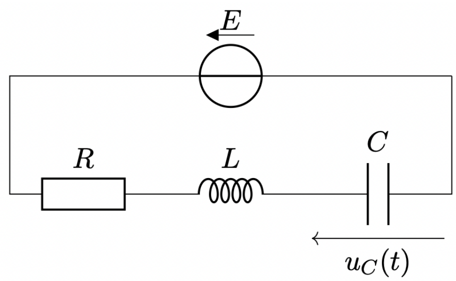
    (a) Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$, lorsque la suspension est en régime pseudo-périodique.

    (b) Donner l'allure de $z(t)$ pour t variant entre 0 et $t \gg t_1$ lorsque la suspension est en régime apériodique.

On précisera clairement sur chaque graphique la valeur de z pour $0 < t < t_1$ et la valeur de z pour t tendant vers l'infini.

III. Interlude : analogie avec le circuit RLC

L'objectif de cette partie est de faire une analogie entre la suspension et un circuit RLC série. On considère le circuit ci-dessous, alimenté par un générateur de tension :



20. Établir l'équation différentielle suivie par la tension $u_c(t)$. L'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$$

avec ω_0 et Q des paramètres dont on établira les expressions en fonction de R, L et C. Quelles sont les noms et unités de ω_0 et Q ?

21. On admet que pour le système masse m - ressort de raideur k - amortisseur de coefficient h, on obtient $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \sqrt{km}/h$. En comparant avec vos expressions pour le circuit RLC série, en déduire ce qui joue le rôle de h, de m et de k dans le circuit électrique.

22. On souhaite résoudre l'équation obtenue à la question 20. On suppose que $Q > 1/2$. Donner l'expression de la solution particulière, et de la solution de l'équation homogène (il interviendra deux constantes d'intégration A et B inconnues). On pourra introduire de nouvelles grandeurs, mais on les exprimera en fonction de ω_0 et Q.

IV. Régime forcé

Dans cette partie, le véhicule se déplace horizontalement avec une vitesse constante v_1. Il est rappelé que, par hypothèse, la roue est considérée comme ponctuelle et reste à tout instant en contact avec le sol. Ici encore, la position du point bas de la suspension (roue) est repérée par la variable $z_s(t)$ (figure 4). dans cette partie, le véhicule se déplace sur un sol ondulé horizontal sinusoïdal. On a ainsi :

$$z_s(t) = z_{s,0}\cos(\omega t).$$

La suspension comporte un système d'amortissement visqueux ; son action sur le véhicule est modélisée par la force $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $\vec{v}$ représente la vitesse relative des deux extrémités de l'amortisseur et h le coefficient de frottement fluide. On a donc $\vec{f} = -h(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_s}{dt})\vec{u}_z$.

23. Montrer que la force exercée par le ressort de la suspension sur la masse m en fonction s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -k(z - z_s - l_0)\overrightarrow{u_z}$$

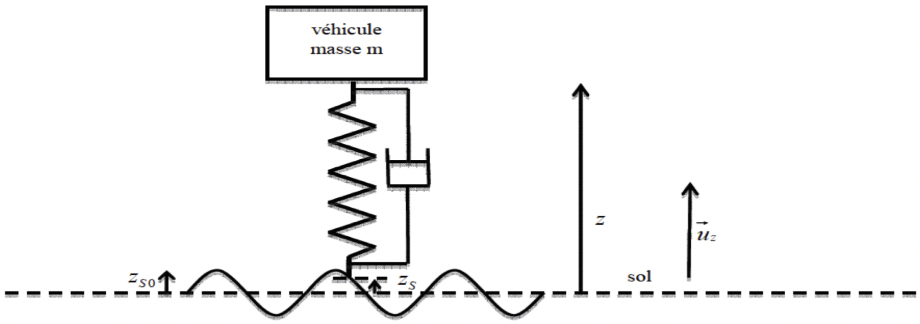


Figure 4: Régime forcé

24. En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ et $z_s(t)$ et leur dérivées temporelles ainsi que les paramètres h, m, k et z_e (où z_e représente la longueur du ressort à l'équilibre statique calculée à la question 9).

Voulant étudier les oscillations de la masse m autour de sa position d'équilibre z_e, on posera $z' = z - z_e$.

25. Montrer que l'équation différentielle précédente peut s'écrire :

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} + h\frac{dz'}{dt} + kz' = h\frac{dz_s}{dt} + kz_s$$

Dans la suite de cette partie, on utilisera les notations complexes rappelées au début de l'énoncé. On a ainsi : $\underline{z'} = \underline{Z'}e^{j\omega t}$ et $\underline{z_s} = \underline{Z_s}e^{j\omega t}$. Pour simplifier les notations, on posera : $\omega_0^2 = k/m$ et $2\lambda = h/m$.

26. Comment s'appelle la grandeur $\underline{Z'}$? Que représente son module physiquement ? Et son argument ?

27. Quelle équation vérifie $\underline{Z'}$?

28. Déterminer l'expression de la réponse complexe $\underline{Z'}$ en fonction de la suspension en fonction de $\underline{Z}_s$, ω, ω_0 et λ . Montrer que le module de la réponse complexe est donné par l'expression :

$$H = \left|\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z_s}}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

Par la suite, les candidats pourront utiliser l'expression précédente du module de la réponse complexe, même s'ils ne sont pas parvenus à la démontrer.

29. Étude de la réponse complexe

    (a) Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers 0. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

    (b) Déterminer la valeur vers laquelle tend H lorsque la pulsation ω tend vers l'infini. Décrire dans ce cas le comportement de la masse m par rapport au sol.

    (c) On considère pour simplifier :

    • que la valeur maximale de H est atteinte pour une pulsation ω_r non nulle telle que le dénominateur de l'expression précédente est minimal ;
    • que l'on se trouve dans le cas où $\omega_0^2 > 4\lambda^2$.

Déterminer l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et λ. À quoi correspond physiquement le cas où la pulsation est égale à ω_r ?

Remarque : en réalité, la détermination de la pulsation qui correspond à la valeur maximale de H aurait dû prendre en compte le fait que le numérateur de H dépend également de la pulsation. Le calcul complet conduit à des résultats sensiblement équivalents.

30. Donner l'allure de la courbe représentant H en fonction de ω. On fera apparaître les valeurs particulières déterminées dans la question précédente.

Fin du sujet