



Devoir surveillé de physique n°3

(Durée : 4 heures)

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte 8 pages, et est composé de trois parties indépendantes.

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

★ ★ ★

Données

- ▷ Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- ▷ Champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- ▷ Viscosité dynamique du champagne : $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$
- ▷ Masse volumique du champagne : $\rho_l = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- ▷ Masse volumique du CO_2 : $\rho_g = 1,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- ▷ Expression de la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = -\rho_l V \vec{g}$, où ρ_l désigne la masse volumique du fluide dans lequel le corps est immergé, et V son volume.
- ▷ La force électrique exercée par un champ électrique \vec{E} sur une charge q s'écrit $\vec{F} = q\vec{E}$.

Première partie : Champagne !

L'objectif de l'exercice est d'étudier la remontée des bulles dans le champagne, liquide de masse volumique ρ_l . Les bulles sont constituées de CO_2 à la pression $p = 1$ bar. La force \vec{f} exercée par le champagne sur la bulle est modélisée par la relation de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$$

où η est la viscosité du champagne, r le rayon de la bulle et \vec{v} la vitesse de la bulle. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, auquel on adjoint un repère d'espace (O, \vec{e}_z) vertical vers le haut.

1. Montrer que le poids de la bulle est négligeable devant sa poussée d'Archimède. En déduire les deux seules forces agissant sur la bulle.

Dans la suite, on négligera le poids de la bulle dans le bilan des forces.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante v_z de la vitesse de la bulle sur l'axe z et l'écrire sous la forme :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau}v_z = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

où l'on exprimera les paramètres v_{lim} et τ en fonction des masses volumiques ρ_l et ρ_g (masse volumique du gaz), et de η , g et r .

3. On considère qu'à sa formation, la bulle est sans vitesse. Résoudre l'équation différentielle.
4. Représenter l'allure de v_z au cours du temps. Distinguer graphiquement le régime transitoire du régime permanent.
5. Indiquer v_{lim} et τ sur la courbe et donner leur interprétation physique.
6. Calculer numériquement τ . Quelle approximation peut-on effectuer sur l'expression de v_z ?

L'émission des bulles se fait la plupart du temps de manière périodique, ce qui rend l'étude plus aisée. La méthode expérimentale utilisée par Gérard Liger-Belair et son équipe du laboratoire d'Œnologie de Reims est présentée ci-dessous. Ils ont photographié un train de bulles dans une flûte de champagne à un instant donné en se servant d'un appareil photographique dont l'ouverture du diaphragme est synchronisée avec le flash d'un stroboscope qui émet des éclairs régulièrement espacés à la fréquence f_b . Un écran diffusant est interposé entre le verre et le flash afin d'homogénéiser la lumière. Les distances sont étalonnées à l'aide d'un papier millimétré collé à la surface du verre. Un schéma du dispositif et un exemple de cliché obtenu est représenté figure 1.

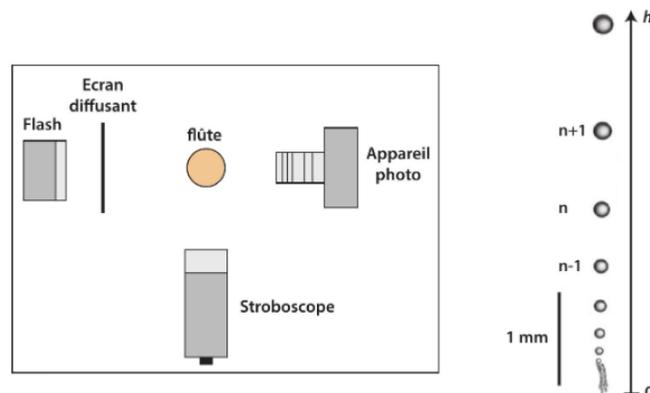


Figure 1 – Dispositif expérimental pour l'étude de la remontée des bulles de champagne.

- Expliquer en quoi un choix judicieux de la fréquence f_b permet d'avoir accès, en un seul cliché, à une succession de positions occupées par une bulle.
- Le cliché précédent a été pris avec $f_b = 20$ Hz. Justifier que la vitesse v_n d'une bulle indiquée n peut être évaluée par :

$$v_n = f_b \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2}$$

où h_{n+1} et h_{n-1} représentent respectivement les altitudes des bulles indicées $n + 1$ et $n - 1$. Effectuer l'application numérique pour la bulle indicée n sur la figure 1.

- L'allure des positions des bulles sur la photographie est-elle en accord avec l'hypothèse formulée question 6 ? Expliquer.

On peut également mesurer le rayon de chaque bulle, ce qui permet finalement de tracer la vitesse en fonction du rayon, comme représenté figure 2.

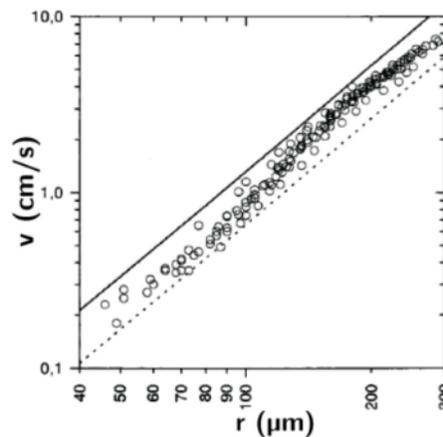


Figure 2 – Vitesse de remontée de la bulle en fonction du rayon.

- Montrer que la vitesse limite v_{lim} obéit à l'équation :

$$\log v_{lim} = A + 2 \log r$$

où \log désigne la fonction logarithme décimal et A une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème.

- Justifier que cette expression est cohérente avec la figure 2.

Deuxième partie : La révolution de l'horloge à quartz

La mesure du temps s'est faite par des moyens divers au cours de l'histoire de l'humanité : cadrans solaires, sabliers, pendules, circuits électroniques... La précision de cette mesure s'est sans cesse améliorée, pour atteindre celle des horloges atomiques d'aujourd'hui, comme le montre le graphique ci-dessous.

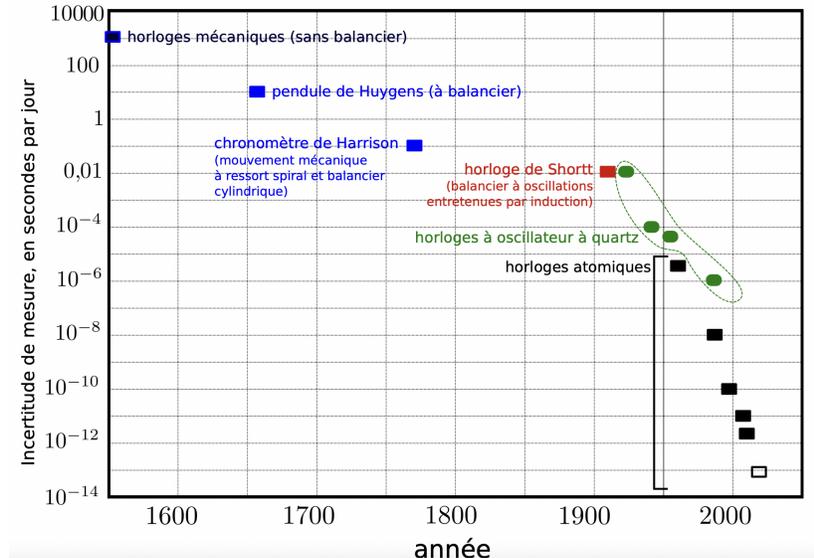


Figure 1: Amélioration de la précision des horloges, de l'horloge mécanique à l'horloge atomique

La première horloge à quartz est conçue en 1927 par les laboratoires Bell. La première montre-bracelet est commercialisée en 1969. Le quartz est un cristal piézoélectrique : lorsqu'il est soumis à une différence de potentiel il se déforme, et inversement s'il est contraint mécaniquement alors une différence de potentiel apparaît entre ses faces.

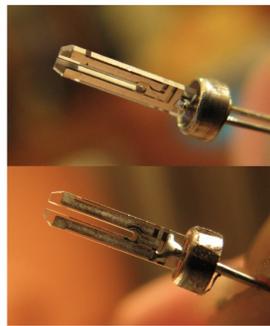


Figure 2: Quartz servant dans une montre

Un cristal de quartz taillé en diapason – comme sur la figure ci-dessus – vibre mécaniquement à une fréquence bien précise. Il est inséré dans un circuit électronique, avec une électrode métallisée sur chacune de ses faces. Cette précision dans la fréquence de vibration, associée au couplage électrique par l'effet piézoélectrique, permet d'obtenir des circuits électroniques résonants avec des facteurs de qualité très élevés, et donc des oscillateurs très précis.

II.A - Étude du quartz

Pour étudier la résonance très sélective du quartz, on le place dans le montage ci-dessous.

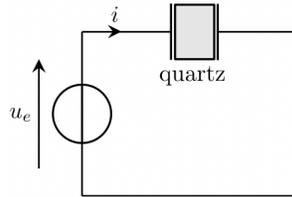


Figure 3: Montage à quartz

On dispose également d'un dispositif, non représenté, qui délivre une tension U_s égale à l'amplitude du courant i multipliée par une résistance $R = 47 \text{ k}\Omega$: si $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$, alors $U_s = Ri_0$.

L'étude se fait en régime sinusoïdal forcé, et on utilise le formalisme complexe. On note les grandeurs complexes en les soulignant. Par exemple $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est représenté par $\underline{i}(t) = i_0 \exp(j(\omega t + \varphi))$.

12. Justifier que $\underline{i} = \frac{u_e}{\underline{Z}_Q}$, où \underline{Z}_Q désigne l'impédance électrique du quartz.

Électriquement, le comportement du quartz peut être modélisé par un condensateur C_0 (capacité des électrodes séparées par un diélectrique et des fils de liaisons) en parallèle avec un circuit série r , L_1 et C_1 qui correspond aux grandeurs motionnelles. Ce circuit série r , L_1 , C_1 représente le couplage électromécanique lié à l'effet piézoélectrique (cf figure 4). On étudie les résonances, donc la recherche des pulsations ω telles que l'amplitude de i soit importante, donc telles que $1/|\underline{Z}_Q|$ tende vers des valeurs importantes. Pour repérer la résonance, on néglige d'abord tout effet dissipatif : dans les deux questions qui suivent, $r = 0$.

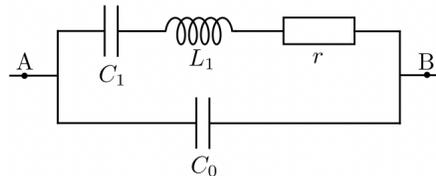


Figure 4: Modélisation du comportement du quartz

13. Montrer que l'impédance \underline{Z}_Q équivalente au dipôle A-B vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Z}_Q} = jC_{\text{éq}}\omega \times \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}$$

avec $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et ω_2 et $C_{\text{éq}}$ dont on donnera les expressions en fonction de C_0 , C_1 et L_1 .

14. En déduire l'expression de la fréquence f_1 de résonance en intensité du circuit d'étude du quartz.

Les questions qui précèdent montrent que c'est la branche L_1 , C_1 , r qui est responsable de la résonance. Pour simplifier, on étudie donc le quartz en enlevant dans le modèle la capacité C_0 . On obtient alors le circuit ci-dessous.

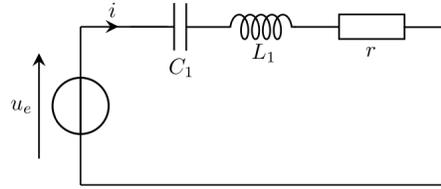


Figure 5: Simplification du circuit pour l'étude de la résonance

15. Montrer que :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

La courbe figure 5 donne, pour chaque point, la valeur de U_s pour une fréquence f donnée du signal $u_e(t)$. On rappelle que $U_s = Ri_0$. L'amplitude du signal u_e est $u_0 = 0,20$ V.

On donne également l'expression de l'acuité A_c d'une résonance dans le cas étudié ici :

$$A_c = \frac{f_r}{\Delta f} = Q$$

où Q est le facteur de qualité, f_r la fréquence de résonance et Δf la bande passante, délimitée par les fréquences de coupure telles qu'à ces fréquences, l'amplitude est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$.

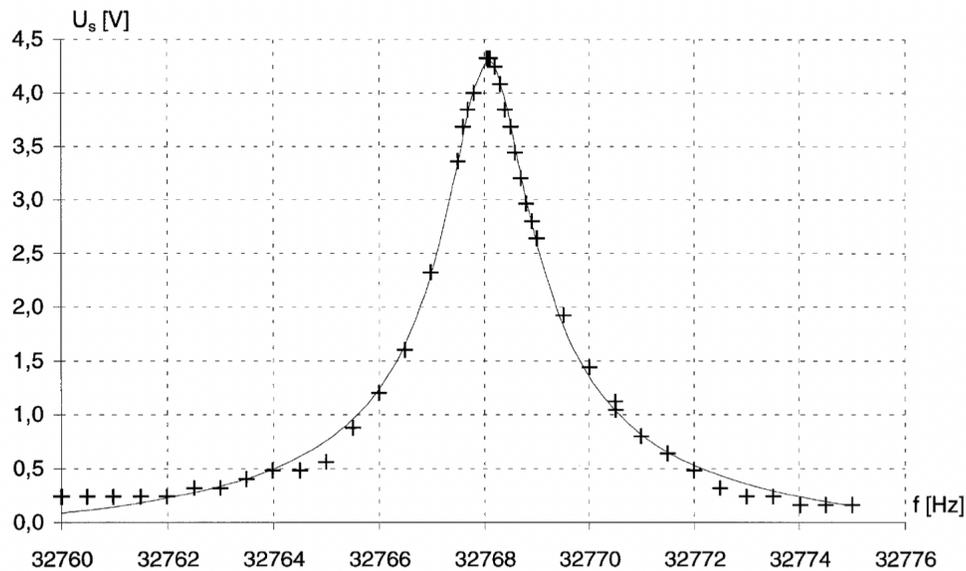


Figure 6: Allure de l'amplitude à la résonance

16. En exploitant ce graphique, donner une valeur de la résistance r .

17. Donner également une valeur du facteur de qualité Q .

On retiendra les valeurs approchées $r = 2$ k Ω , $Q = 20000$ et $\omega_1 = 2 \times 10^5$ rad/s.

18. Donner les expressions de L_1 et C_1 en fonction de Q , r et ω_1 .

19. En déduire la valeur de L_1 . Commenter.

II.B - Utilisation dans une montre

Le quartz permet ainsi de concevoir un circuit filtre passe-bande avec un facteur de qualité très élevé.

20. Si on laisse le circuit précédent osciller de façon libre, donner une estimation du temps pendant lequel les oscillations perdurent. Ceci est-il raisonnable pour fabriquer une horloge ?

Le quartz est en réalité inséré dans un circuit dit "oscillateur", qui entretient ses oscillations. Le facteur de qualité élevé permet d'avoir un signal quasi-harmonique dont la fréquence est précisément contrôlée et vaut, dans le cas présent, 32 768 Hz.

21. On peut remarquer que $32768 = 2^{15}$. Quelle peut-être la raison d'un tel choix pour la fabrication d'une montre ?

II.C - Précision

La fréquence de résonance du quartz varie en fonction de la température, avec typiquement une variation relative $\frac{\Delta f}{f} \simeq 10^{-6}$ pour un écart de 10 °C.

22. Quel est alors l'imprécision en seconde cumulée sur une journée de fonctionnement ?

23. Comparer ceci aux données de la figure 1 du début de l'exercice. Commenter.

Troisième partie : Pourquoi le ciel est-il bleu ?

Joseph J. Thomson (1856 - 1940) a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié au noyau (O) : il est soumis à une force de rappel passant par le centre de l'atome, de la forme $\vec{F}_e = -k\vec{OM}$. Nous supposons que cet électron est freiné par une force de frottement fluide proportionnel à sa vitesse :

$$\vec{F}_R = -h\vec{v} = -h\frac{d\vec{OM}}{dt}$$

et que le centre de l'atome O est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$$

de pulsation ω (provenant du Soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère, représenté à l'aide du modèle de Thomson.

24. Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de l'électron dans le référentiel d'étude. Mettre cette équation sous la forme :

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\vec{OM}}{dt} + \omega_0^2\vec{OM} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

où l'on exprimera ω_0 et Q en fonction des données du problème.

On se place en régime sinusoïdal forcé (régime permanent établi) : on a $\vec{OM} = X_m \cos(\omega t + \varphi)\vec{e}_x$ soit en notation complexe $\vec{OM} = \underline{X}_m e^{j(\omega t + \varphi)}\vec{e}_x$.

25. Comment s'appelle la grandeur \underline{X}_m ? Que représente son module ? Et son argument ?
26. À quelle équation obéit \underline{X}_m ?
27. En déduire l'amplitude réelle X_m en fonction de ω , E_0 , ω_0 , Q , e et m .
28. Exprimer ensuite φ .

Le rayonnement visible provenant du Soleil possède des longueurs d'onde s'étendant de $\lambda_b = 400$ nm (bleu) à $\lambda_r = 800$ nm (rouge) (longueurs d'onde du champ électrique).

29. Exprimer la relation liant ω et λ .
30. En comparant les valeurs de ω_b et ω_r avec ω_0 , en déduire une simplification de l'expression de X_m et de φ obtenues précédemment.
31. En déduire que l'accélération de l'électron s'écrit :

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \simeq \alpha \cos(\omega t)\vec{e}_x$$

où l'on exprimera α en fonction de E_0 , ω , ω_0 , e et m .

32. Sachant que l'électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer ainsi pourquoi le ciel est bleu.

Fin du sujet