Première partie : Circuit RL à deux mailles

1. Valeurs asymptotiques : $u_2(\infty) = 0$ (bobine = fil de connexion) et $u_1(\infty) = E$ par loi des mailles.

2. Le circuit compte deux mailles, il faut donc a priori exploiter deux lois de Kirchoff. La loi des mailles donne

$$E = u_1 + u_2$$

alors que la loi des nœuds donne avec les notations de la question précédente

$$i_1 = i_2 + i_L$$

L'équation différentielle doit porter sur u_2 : il faut donc exprimer u_1 en fonction de u_2 puis injecter le résultat dans la loi des mailles. D'après la loi d'Ohm puis en utilisant la loi des nœuds,

$$u_1 = R_1 i_1 = R_1(i_2 + i_L)$$

Cherchons maintenant à exprimer i_2 et i_L en fonction de u_2 par des lois de comportement. Comme celle d'une bobine implique la dérivée du courant la traversant, on dérive l'expression trouvée pour u_1 avant d'utiliser les lois de comportement, d'où

$$\frac{du_1}{dt} = R_1\left(\frac{di_2}{dt} + \frac{di_L}{dt}\right) = R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L}u_2\right)$$

Comme ce résutat implique du_1/dt, il faut à dériver la loi des mailles par rapport au temps avant de l'y injecter, d'où

$$0 = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} = R_1\left(\frac{1}{R_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L}u_2\right) + \frac{du_2}{dt}$$

L'équation différentielle s'écrit finalement :

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{du_2}{dt} + \frac{R_1}{L}u_2 = 0$$

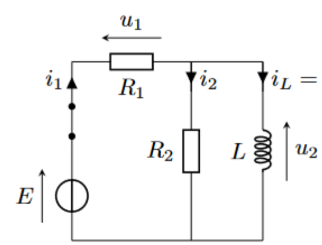
soit, en l'écrivant sous forme canonique

$$\boxed{\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{\tau}u_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = L\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

Remarque : On vérifie bien que le temps caractéristique est homogène à une inductance sur une résistance.

3. $u_1(0^-) = 0$ et $u_2(0^-) = 0$. De plus, d'après le schéma ci-dessous équivalent en 0^+, on a :

$$E = R_1 i_1 + R_2 i_2 \quad \text{d'où} \quad i_1 = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

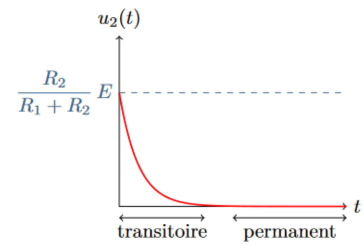


On en déduit donc, d'après la loi d'Ohm :

$$\boxed{u_1(0^+) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}E \quad \text{et} \quad u_2(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E}$$

4. $\boxed{u_2(t) = \frac{R_2}{R_2 + R_1}E\exp -\frac{t}{\tau}}$

5. La figure est donnée ci-dessous.



6. On cherche t_{10} tel que $u(t_{10}) = u_2(0^+)/10$. On trouve :

$$\boxed{t_{10} = \tau \ln(10)}$$

7. On trouve :

$$\boxed{L \approx 0,43H}$$

Deuxième partie : Suspension d'un véhicule

I. Suspension sans amortissement

8. Bilan des forces :

▷ Le poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$

▷ La force de rappel du ressort $\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{u}_z$.

9. A l'équilibre, l'accélération de la masse est nulle, donc le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m dans le référentiel terrestre s'écrit :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad \text{soit} \quad \boxed{z_e = l_0 - \frac{mg}{k}}$$

10. On applique le principe fondamental de la dynamique au véhicule de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\vec{u}_z - k(z - l_0)\vec{u}_z$$

En projetant selon z, on obtient :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}(l_0 - \frac{mg}{k}) = \frac{k}{m}z_e$$

On identifie donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \beta = \frac{k}{m}z_e}$

11. La solution générale du mouvement s'écrit :

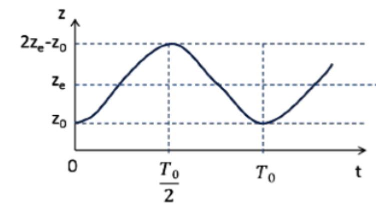
$$\boxed{z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + z_e}$$

12. Grâce aux conditions initiales, on en déduit :

$$\boxed{z(t) = z_e + (z_0 - z_e)\cos(\omega_0 t)}$$

13. On calcule $z(t)$ pour différentes valeurs de t : $z(T_0/4) = z_e$, $z(T_0/2) = 2z_e - z_0$, $z(3T_0/4) = z_e$, $z(T_0) = z_0$.

D'où l'allure ci-dessous et $z_{\text{moy}} = z_e$, $z_{\text{max}} = 2z_e - z_0$, $z_{\text{min}} = z_0$



II. Suspension avec amortissement

14. h s'exprime en kg.s^{-1}.

15. Il faut reprendre le bilan des forces de la question 1. et y ajouter la force de frottement fluide $\vec{f} = -hv\vec{u}_z$. **La position d'équilibre est inchangée** puisqu'à l'équilibre la vitesse est nulle, de même donc pour $\vec{f}$.

16. L'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}z_e}$$

17. L'équation caractéristique de cette équation différentielle s'écrit :

$$r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$. On distingue alors trois régimes d'évolution :

▷ Le régime **apériodique** dans le cas où $h > 2\sqrt{km}$

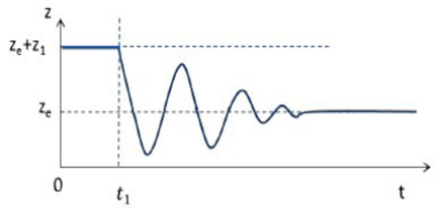
▷ Le régime **apériodique critique** dans le cas où $h = 2\sqrt{km}$

▷ Le régime **pseudo-périodique** dans le cas où $h < 2\sqrt{km}$

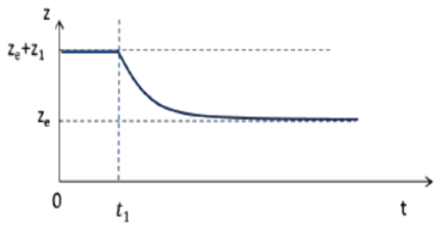
18. a) Soit m la masse du véhicule à vide et M la masse de la charge. Si la suspension est en régime critique lorsque le véhicule à vide, alors $h = 2\sqrt{km}$. En charge, $m' = m + M > m$, par conséquent $h < 2\sqrt{km'}$, le régime devient pseudo-périodique.

18. b) Pour ne pas que la suspension soit en régime pseudo-périodique même en charge, il faut choisir $h > 2\sqrt{km}$. Dans la pratique, on peut supposer que $M \ll m$ et que par conséquent, même en charge, la suspension reste en régime apériodique si $h = 2\sqrt{km}$.

19. a) $z(t < t_1) = z_1 + z_e$ et $z(t \gg t_1) = z_e$. Dans le régime pseudo-périodique, on en déduit l'allure du graphe ci-dessous :



19. b) Dans le régime apériodique, on en déduit l'allure du graphe suivante :



III. Interlude : analogie avec le circuit RLC série

20. La loi des mailles s'écrit :

$$u_C + u_R + u_L = E$$

En utilisant les lois de comportement $u_R = Ri = RC\frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di}{dt} = LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$, on obtient :

$$u_C + RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} = E$$

On en déduit ainsi la forme canonique :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

où l'on identifie ainsi $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\omega_0/Q = R/L$ d'où $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

ω_0 est la pulsation propre (rad/s) et Q le facteur de qualité (sans unité).

21. On fait l'analogie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{\sqrt{km}}{h} = Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Ainsi, on a l'analogie suivante :

$$\boxed{h = R, \quad k = 1/C, \quad L = m}$$

22. La solution particulière est constante donc on a :

$$\boxed{u_{C,p} = E}$$

La solution homogène est déterminée à l'aide de l'équation caractéristique liée à l'équation différentielle :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

avec un discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2(1 - 4Q^2) < 0$ car $Q > 1/2$: on est en régime psuedo-périodique. Les racines du polynôme caractéristique s'écrivent alors :

$$\boxed{r_{1,2} = -\mu \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

La solution totale s'écrit donc :

$$\boxed{u_C(t) = E + e^{-\mu t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]}$$

IV. Régime forcé

23. La longueur du ressort est donnée par $l(t) = z(t) - z_s$. La force de rappel s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{F} = -k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z}$$

24. En appliquant la deuxième loi de Newton au véhicule dans le référentiel terrestre, on a :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\vec{u}_z - h(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_s}{dt})\vec{u}_z - k(z - z_s - l_0)\vec{u}_z$$

En projetant selon l'axe z, on obtient :

$$\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} + h\frac{dz}{dt} + kz = h\frac{dz_s}{dt} + kz_s + kz_e}$$

25. On pose $z' = z - z_e$: on a alors $\frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt}$ et $\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}$. L'équation précédente s'écrit alors :

$$m\frac{d^2z'}{dt^2} + h\frac{dz'}{dt} + kz' = Y(t)$$

avec $\boxed{Y(t) = h\frac{dz_s}{dt} + kz_s}$

26. $\underline{X_m}$ désigne l'amplitude complexe : son module représente l'amplitude réelle de x, et son argument la phase à l'origine de ce même signal.

27. En utilisant la représentation complexe, on peut écrire :

- ▷ $\underline{Z}' = \underline{Z}'_m e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z}'_m = Z_m e^{j\phi}$
- ▷ $\underline{Z}_s = Z_{sm} e^{j\omega t}$

On peut alors passe l'équation différentielle en représentation complexe et exprimer l'amplitude complexe $\underline{Z}'$:

$$\boxed{\underline{Z}'(-m\omega^2 + j\omega h + k) = \underline{Z}_s(j\omega h + k)}$$

28. L'amplitude complexe s'écrit donc :

$$\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s} = \frac{j\omega h + k}{-m\omega^2 + j\omega h + k}$$

En posant $\lambda = h/2m$ et $\omega_0^2 = k/m$, on obtient :

$$\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s} = \frac{\omega_0^2 + 2j\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\lambda}$$

En prenant le module de cette expression (qui est en fait la fonction de transfert de la suspension), on obtient l'expression demandée :

$$\boxed{\left|\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}_s}\right| = \sqrt{\frac{\omega_0^4 + 4\omega^2\lambda^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}}$$

29. a) Pour $\omega \to 0$, $H \to 1$. Dans ce cas, la masse suit directement le relief du sol : $z = z_e + z_s$ à tout instant t.

29. b) Pour $\omega \to \infty$, $H \to 0$. Dans ce cas, la masse m ne bouge pas verticalement et on a, à tout instant t, $z = z_e$.

29. c) ω_r est la pulsation pour laquelle le dénominateur est minimal. On pose $g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2$ afin d'étudier ses variations. La dérivée de cette fonction s'écrit :

$$g'(\omega) = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\omega\lambda^2$$

La dérivée s'annule pour $\omega_r = \omega_0^2 - 2\lambda^2$. L'énoncé précise que l'on est dans le cas où $\omega_0^2 > 4\lambda^2$, donc :

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0 - 2\lambda^2}}$$

La fonction de transfert H de la suspension est maximale à ω_r, ce qui correspond à la **résonance de la suspension**.

30. On trace l'allure de $H(\omega)$ à l'aide des limites calculées précédemment :