

Exercice n°1 : Champagne !

1. Le poids de la bulle de champagne a pour norme :

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g$$

Comme tout corps plongé dans un fluide, le bulle a une poussée d'Archimède de norme :

$$\Pi_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g$$

Ainsi le rapport entre les normes des deux forces vaut :

$$\frac{P}{\Pi_A} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g} = \frac{\rho_g}{\rho_l} = \frac{1}{1000} \ll 1$$

On en déduit donc que **le poids de la bulle peut être négligé devant sa poussée d'Archimède.**

2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la bulle dans le référentiel terrestre, supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Pi}_A + \vec{f}$$

En projetant selon l'axe (Oz), on a :

$$m \frac{dv_z}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g - 6\pi \eta r v_z$$

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi \eta r}{m} v_z = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g}{m}$$

On peut ainsi identifier terme à terme avec l'équation canonique donnée dans l'énoncé :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi \eta r}{m} \quad \text{soit} \quad \tau = \frac{m}{6\pi \eta r} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g}{6\pi \eta r} \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{2r^2 \rho_g}{9\eta}$$

et

$$\frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g}{m} \quad \text{soit} \quad v_{\text{lim}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g}{m} \times \frac{m}{6\pi \eta r} \quad \text{d'où} \quad v_{\text{lim}} = \frac{2r^2 \rho_l g}{9\eta}$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

► **Solution particulière** : $v_p = v_{\text{lim}}$

► **Solution homogène** : $v_h(t) = A \exp -\frac{t}{\tau}$

► **Condition initiale** : à $t = 0$, la bulle est sans vitesse initiale donc $v_z(0) = 0$. On en déduit $A = -v_{\text{lim}}$. Ainsi, la solution s'écrit :

$$v_z(t) = v_{\text{lim}} \left(1 - \exp -\frac{t}{\tau} \right)$$

4. et 5. Le tracé est donné ci-dessous.

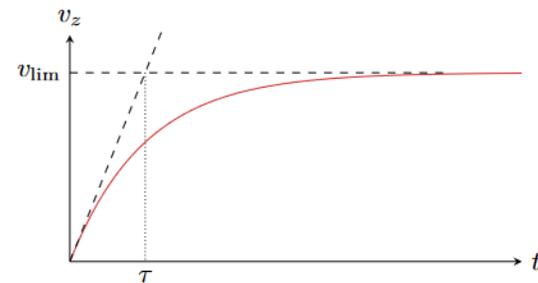


Figure 1: Tracé de la vitesse de la bulle en fonction du temps

6. On trouve par application numérique $\tau \approx 10^{-4}$ s, ce qui est bien plus faible que le temps que met la bulle à remonter dans la flûte, de l'ordre de 1 s. **On peut donc négliger la durée du transitoire** et considérer que la bulle est à tout instant en régime permanent, soit $v_z = v_{\text{lim}}$.

7. Comme l'émission est périodique de période T , choisir $f_b = 1/T$ permet d'observer une multitude de bulles, mais dont les positions correspondent aux positions successives d'une même bulle espacées temporellement de multiples de T . L'ensemble va apparaître fixe.

8. La bulle parcourt la distance $h_{n+1} - h_{n-1}$ en une durée égale à deux périodes $T = 1/f_b$. Ainsi, en assimilant vitesse moyenne et vitesse instantanée, on peut écrire :

$$v_n = \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2/f_b} \quad \text{soit} \quad v_n = f_b \frac{h_{n+1} - h_{n-1}}{2} = 1,5 \text{ cm.s}^{-1}$$

9. L'allure des bulles sur la photographie figure 1 n'est pas en accord avec l'hypothèse de vitesse constante : si c'était le cas, les positions successives seraient régulièrement espacées. L'expression établie précédemment de la vitesse limite montre qu'elle dépend du rayon de la bulle... or on constate sur la photographie que le rayon des bulles augmente lorsqu'elles remontent dans la flûte. C'est probablement cette variation de rayon qui est responsable des variations de vitesse.

10. On a montré précédemment que la vitesse limite valait :

$$v_{\text{lim}} = \frac{2r^2 \rho_l g}{9\eta}$$

donc en prenant le logarithme décimal de cette expression, on obtient :

$$\log v_{\text{lim}} = \log \frac{2\rho_l g}{9\eta} + \log r^2$$

soit

$$\log v_{\text{lim}} = A + 2 \log r \quad \text{avec} \quad A = \log \frac{2\rho_l g}{9\eta}$$

11. L'interprétation de la figure est plus délicate : il faut remarquer que les échelles n'y sont pas linéaires, c'est-à-dire que les graduations ne sont pas "régulièrement" espacées. Il s'agit en fait d'une échelle dite logarithmique, que nous introduirons dans le chapitre sur le filtrage. La courbe de la figure 2 représente donc en fait $\log v_{\text{lim}}$ en fonction de $\log r$. On peut alors constater que tous les points expérimentaux se regroupent sur une droite, dont on peut estimer la pente à environ 2. **Le modèle est donc cohérent avec l'expérience réalisée.**

Deuxième partie : Résonance du quartz

12. Par définition de l'impédance :

$$\underline{u}_e = \underline{Z}_Q \times \underline{i} \quad \text{donc} \quad \underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_Q}$$

13. Calcul de l'impédance équivalente :

$$\frac{1}{\underline{Z}_Q} = jC_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega} = jC_0\omega + \frac{jC_1\omega}{1 + (jL_1\omega)(jC_1\omega)}$$

$$\begin{aligned} &= jC_0\omega + \frac{jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} = \frac{jC_0\omega(1 - L_1C_1\omega^2) + jC_1\omega}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= \frac{j(C_0 + C_1)\omega - jC_0L_1C_1\omega^3}{1 - L_1C_1\omega^2} = j(C_0 + C_1)\omega \times \frac{1 - \frac{C_0L_1C_1\omega^2}{C_0+C_1}}{1 - L_1C_1\omega^2} \\ &= jC_{\text{éq}}\omega \times \frac{1 - \omega^2/\omega_2^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2} \end{aligned}$$

d'où on en déduit $C_{\text{éq}} = C_0 + C_1$ et $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{C_0C_1L_1}{C_0+C_1}}}$.

14. On a $i = u_e \times 1/|Z_Q|$, donc on regarde si $1/|Z_Q|$ diverge. On a $1/|Z_Q| \rightarrow \infty$ pour $\omega = \omega_1$, donc la fréquence de résonance est :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}$$

15. Soit $Z_{\text{éq}}$ l'impédance équivalente à r , C et L en série. On a :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_{\text{éq}}} = \frac{\underline{u}_e}{r + jL_1\omega + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{\underline{u}_e/r}{1 + j\left(\frac{L_1\omega}{r} - \frac{1}{rC_1\omega}\right)}$$

En identifiant avec la forme donnée dans l'énoncé, on obtient :

$$\frac{Q}{\omega_1} = \frac{L_1}{r} \quad \text{et} \quad Q\omega_1 = \frac{1}{rC_1}$$

La première donne $Q = L_1\omega/r$, qu'on injecte dans la seconde : $\omega_1^2 L_1/r = 1/rC_1$, soit

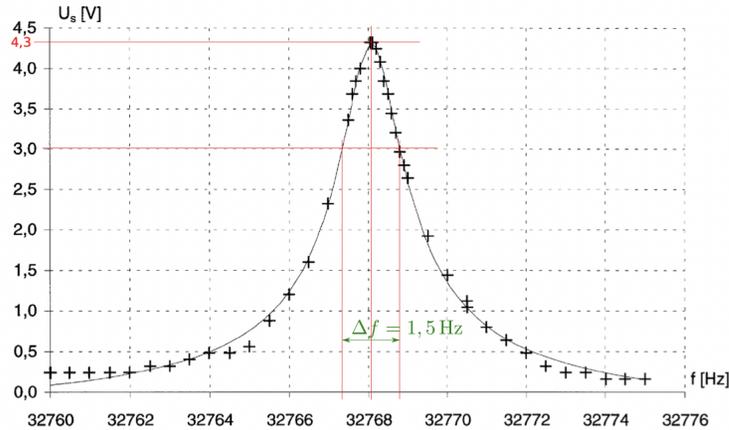
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

16. En utilisant l'expression précédente de i , on voit qu'à la résonance (donc pour $\omega = \omega_1$) on a $\underline{i} = \underline{u}_e/r$. On a donc, en prenant le module, la relation suivante entre les amplitudes des signaux : $i_0 = u_0/r$. Or le graphique montre l'amplitude U_s , qui vaut $U_s = Ri_0$. Ainsi, à la résonance, on a :

$$U_s = \frac{Ru_0}{r}$$

On lit $U_s = 4,3$ V, donc on en déduit :

$$r = \frac{Ru_0}{U_s} \simeq 2,2 \text{ k}\Omega$$



17. Mesure de la largeur Δf : $4,3V/\sqrt{2} = 3V$, on lit $\Delta f = 1,5$ Hz. D'où

$$Q = \frac{32768}{1,5} \simeq 2,2 \cdot 10^3$$

18. On part de $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et de l'expression de Q . On isole ainsi :

$$L_1 = \frac{rQ}{\omega_1} \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{1}{r\omega_1 Q}$$

19. On en déduit : $L_1 = 200$ H. Cette valeur d'inductance n'est pas une valeur usuelle pour des composants électroniques : elle est bien plus grande que l'ordre de grandeur typique, à savoir 100 mH. C'est normal, car il ne s'agit pas de composants réels, mais d'outils servant à modéliser la réponse mécanique du quartz.

20. Il y a environ $Q = 20000$ oscillations libres, chacune de durée $1/f_1$, donc une durée totale

$$\Delta t \approx \frac{Q}{f_1} \approx 1 \text{ s}$$

Ce n'est pas raisonnable pour fabriquer une horloge, il faut entretenir les oscillations !

21. La montre doit délivrer un signal de fréquence 1 Hz, qui est obtenu en divisant par deux plusieurs fois de suite le signal à 32 768 Hz. (Une division par deux est effectuée facilement à l'aide d'un circuit logique.)

22. Pour une seconde, la variation est de 10^{-6} s. Sur une journée, soit 86400 s, elle sera donc de **86 ms**.

23. C'est bien supérieur à la précision atteinte par les horloges à quartz indiquées dans la figure 1.

Troisième partie : Pourquoi le ciel est-il bleu ?

24. On étudie le mouvement de l'électron, de masse m et de charge $-e$, dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Le bilan des forces fait intervenir la force de rappel \vec{F}_e , la force d'amortissement fluide \vec{F}_R et la force électrique $\vec{F} = -e\vec{E}$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit ainsi :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{OM} - h \frac{d\vec{OM}}{dt} - e\vec{E}$$

soit, comme l'accélération correspond à la dérivée seconde du vecteur position \vec{OM} :

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{d\vec{OM}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{OM} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

où l'on identifie ainsi $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$.

25. X_m désigne l'**amplitude complexe** de l'électron. Son module correspond à son amplitude réelle, et son argument à la phase φ .

26. En régime complexe, l'équation s'écrit :

$$-\omega^2 X_m + j\omega \frac{\omega_0}{Q} X_m + \omega_0^2 X_m = -\frac{e}{m} E_0$$

27. Ainsi, on isole l'amplitude complexe pour ensuite calculer son module :

$$X_m = \frac{-eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

d'où l'amplitude réelle, en mettant ω_0^2 en facteur au dénominateur :

$$X_m = |X_m| = \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

28. On obtient :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

29. On a, par définition,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

où c désigne la célérité de la lumière dans le vide.

30. On calcule $\omega_B = 2\pi c/\lambda_B \simeq 4 \times 10^{15}$ rad/s et $\omega_R = 2\pi c/\lambda_R \simeq 2 \times 10^{15}$ rad/s. On a de plus :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 10^{17} \text{ rad/s} \quad \text{donc} \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$$

Ainsi, on peut simplifier le terme sous la racine en l'approximant à 1. L'amplitude complexe approximée s'écrit donc :

$$X_m \simeq \frac{eE_0}{m\omega_0^2}$$

et la phase s'écrit quant à elle :

$$\varphi \simeq \pi$$

31. En reprenant les expressions approximées de X_m et φ , on peut écrire :

$$\vec{OM} = X_m \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{e}{m\omega_0^2} E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

Son accélération s'écrit donc :

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{e\omega^2}{m\omega_0^2} E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x = \alpha \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

Ainsi,
$$\alpha = \frac{e\omega^2}{m\omega_0^2} E_0.$$

32. L'électron diffuse un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération. En notant P cette puissance moyenne, on a :

$$P \propto \alpha^2$$

En faisant le rapport de la puissance moyenne diffusée pour les deux rayonnements (rouge et bleu), on a :

$$\frac{P_B}{P_R} = \frac{\alpha_B^2}{\alpha_R^2} = \frac{\omega_B^4}{\omega_R^4}$$

Ainsi, on a :

$$\frac{P_B}{P_R} \simeq \left(\frac{\lambda_R}{\lambda_B} \right)^4 \simeq 16 !$$

Ainsi, les électrons des atomes de l'atmosphère diffusent un rayonnement bleu 16 fois plus intense que le rayonnement rouge, ce qui justifie la couleur bleu du ciel !