Exercice n°1 - Filtre ADSL ★

Les lignes téléphoniques transportent à la fois les signaux téléphoniques vocaux (fréquences de 0 à 4 kHz), et les signaux informatiques pour l'ADSL par exemple (fréquences de 25 kHz à 2 MHz).

1. Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Proposer un bon choix de fréquence de coupure f_0.

Un filtre ADSL sert à répartir les signaux entre le téléphone et la box ADSL. Il peut se décrire par le circuit ci-dessous. L'entrée e est délivrée par la prise téléphonique murale.

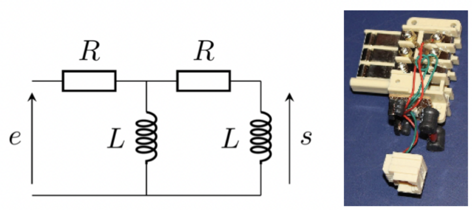


Figure 1: Filtre ADSL et modélisation

2. Indiquer, sans calculs, de quel type de filtre il s'agit. La sortie s doit-elle correspondre au signal fourni à la box internet ou au téléphone ?

Afin de trouver l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{s}/\underline{e}$ on procède en plusieurs étapes. Notons $\underline{u}$ la tension aux bornes de la bobine de gauche. On travaille avec les impédances complexes.

3. Donner l'expression de $\underline{s}$ en fonction de $\underline{u}$, R, L et ω.

4. D'autre part, donner l'expression de $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, R et d'une impédance équivalente $\underline{Z}$ bien choisie (et dont on donnera l'expression).

5. ★ Montrer alors que la fonction de transfert $\underline{H}$ s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{-x^2}{1+3jx-x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L\omega}{R}$$

On cherche maintenant à établir le diagramme de Bode d'un tel filtre.

6. Donner l'expression du module de $\underline{H}$ en fonction de ω. En déduire le gain en décibels du filtre.

7. Déterminer les équivalents à hautes et basses fréquences du gain en décibels.

8. Tracer le diagramme de Bode en gain asymptotique et donner la pulsation de coupure ω_c du filtre. Quelle est la nature du filtre ? Est-ce cohérent avec les prédictions de la deuxième question ?

9. On utilise $L = 4$ mH. Déterminer R pour récupérer les fréquences d'intérêt.

Adapté de l'écrit banque PT

Exercice n°2 - Sismomètre ★★

On considère le dispositif représenté sur la figure 1 : un boîtier (B) muni d'une pointe P est posé sur le sol, de telle sorte que sa pointe suive les déplacements verticaux du sol, repérés dans un référentiel galiléen (R) par leur côte $Z_p(t)$ sur la verticale ascendante $\vec{u}_z$. L'axe (Ox) est lié à ce référentiel (R).

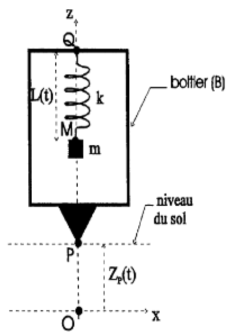


Figure 2: Principe du sismomètre

Les extrémités Q et M d'un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 sont fixées respectivement au boîtier et à un point matériel de masse m. La position de M par rapport au boîtier est repérée par la longueur $L(t)$ du ressort. Le mouvement de la masse m est amorti par une force $\vec{F} = f\dfrac{dL}{dt}\vec{u}_z$, où f est une constante positive.

En l'absence d'ondes sismiques, le point P est fixe : $Z_p(t) = 0$.

1. Exprimer la longueur L_1 du ressort lorsque la masse m est en équilibre en fonction de L_0, m, g et k.

Dans toute la suite, on pose $L(t) = L_1 - z(t)$ et on suppose que l'électronique du sismographe permet d'obtenir directement $z(t)$.

2. ★ Montrer que l'accélération du point M s'écrit :

$$a(M) = \frac{d^2Z_p}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}$$

3. En présence d'une onde sismique, la pointe P est animée d'un mouvement modélisé par $Z_p(t) = a\cos(\omega t)$. En traduisant les lois de la mécanique dans le référentiel (R), montrer que l'équation du mouvement de M se met sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\lambda\omega_0\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \omega^2 a\cos(\omega t)$$

et exprimer les constantes λ et ω_0 en fonction des données.

4. Application numérique : calculer λ et ω_0 pour $m = 10$ kg, $k = 10^3$ N·m^{-1} et $f = 2{,}1.10^2$ kg·s^{-1}.

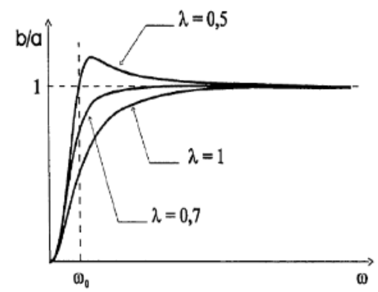
La réponse $z(t)$ du sismographe à l'excitation $Z_p(t) = a\cos(\omega t)$ est égale à la somme d'un régime transitoire $z_{RT}(t)$ et d'un régime sinusoïdal forcé $Z_{RPS}(t)$.

5. Pour quelle valeur de λ le régime transitoire est-il apériodique critique ? Quelle est alors la forme générale de $z_{RT}(t)$? On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.

Dans la suite, on s'intéresse au régime sinusoïdal forcé pour lequel la solution est de la forme $z(t) = b\cos(\omega t - \phi)$. Comme en électrocinétique, on introduit la représentation complexe associée $\underline{z}(t) = b\exp[j(\omega t - \phi)]$.

6. Établir l'expression du rapport b/a en fonction de ω_0, ω et λ.

7. La figure 2 donne l'allure du graphe de b/a en fonction de ω pour différentes valeurs de λ. Vérifier la cohérence de ce graphe avec l'expression obtenue à la question précédente, en examinant les cas limites $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.



8. À quelle condition sur ω le sismographe restitue-t-il fidèlement l'amplitude du mouvement de la pointe P ? Quel est l'intérêt de choisir pour λ une valeur proche de celle calculée précédemment ?

Adapté de l'agrégation externe de chimie

Exercice n°3 - Analyse spectrale ★★★

On envoie le signal périodique u_e représenté ci-dessous sur un filtre du premier ordre. On y a représenté également la sortie du filtre u_s.

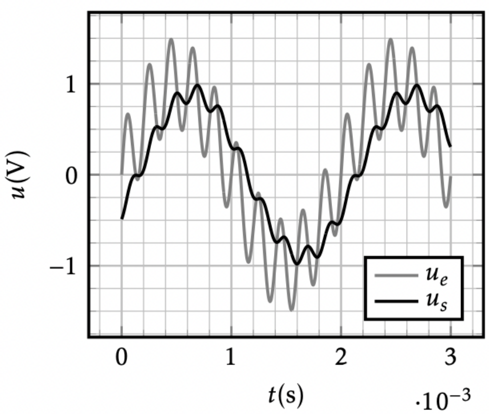


Figure 3: Signal d'entrée u_e et signal u_s en sortie du filtre

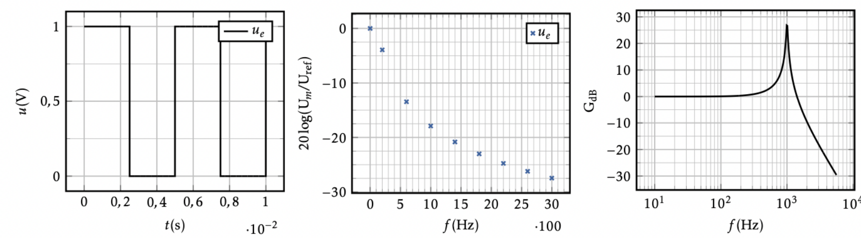
1. Interpréter ces signaux comme une somme de deux sinusoïdes dont on précisera les amplitude A_1 et A_2, les fréquences f_1 et f_2 et les phases φ_1 et φ_2.

2. En déduire l'allure des spectres de ces deux signaux. On utilisera une représentation semi-logarithmique pour représenter $20\log(A_i)$ en fonction de la fréquence, comme sur la figure 4 (b).

3. Identifier la nature du filtre et déterminer sa pulsation de coupure. Vérifier également l'accord avec les déphasages observés entre les composantes de l'entrée et de la sortie.

On envoie un signal créneau (voir la figure 4 (a)) sur un filtre dont le gain en dB est représenté sur la figure 4 (c). Le spectre de Fourier du signal d'entrée u_e est représenté sur la figure 4 (b). On a arbitrairement translaté l'axe des ordonnées pour que la composante prépondérante ait une valeur nulle en dB et on a éliminé du spectre les composantes de poids négligeable.

4. Identifier et justifier les valeurs des fréquences des composantes de Fourier. Que représente la composante de fréquence nulle ?



(a) Signal d'entrée : évolution temporelle. (b) Signal d'entrée : spectre de Fourier. (c) Diagramme de Bode du filtre.

Figure 4: Filtrage d'un signal créneau

5. Utiliser le diagramme de Bode pour déterminer le spectre de Fourier du signal de sortie du filtre.

6. ★ En déduire l'allure de son évolution temporelle.