Vrai / Faux

1. Le vecteur vitesse d'un point en mouvement est toujours tangent à la trajectoire.

Vrai ❐ Faux ❐

2. Le vecteur accélération d'un point en mouvement est toujours tangent à la trajectoire.

Vrai ❐ Faux ❐

3. Les vecteurs unitaires de la base cylindrique sont tous fixes au cours du mouvement d'un point M.

Vrai ❐ Faux ❐

4. Si le mouvement d'un point est uniforme, alors son vecteur accélération est nul.

Vrai ❐ Faux ❐

5. La vitesse d'un point M en coordonnées polaires s'écrit $\overrightarrow{v}(M) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\theta\overrightarrow{e_\theta}$.

Vrai ❐ Faux ❐

6. La composante radiale de l'accélération en coordonnées cylindriques s'écrit $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

Vrai ❐ Faux ❐

Avec le cahier d'entraînement

⇝ **Coordonnées et projections :** entraînement 10.5, 10.6, 10.7.

⇝ **Dériver des vecteurs unitaires :** entraînements 10.10.

⇝ **Mouvement classiques :** entraînements 10.13, 10.14, 10.15.

Pour bien démarrer

Exercice n°1 - Freinage d'urgence (★)

Une voiture, animée d'une vitesse $v_0 = 90$ km.h^{-1} sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme $a = 4,2$ m.s^{-2}. Calculer la durée et la distance de freinage.

Exercice n°2 - Longueur d'une piste de décollage (★)

Pour décoller, un avion doit atteindre la vitesse de $v_d = 180$ km/h en bout de piste. Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2{,}5$ m/s^2 ?

Exercice n°3 - Sortie d'autoroute (★★)

Madame Michu, au volant de son automobile (que l'on assimilera à un point matériel) se déplace sur l'autoroute à la vitesse $v_0 = 130$ km/h. Elle souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50$ m. Pour éviter de déraper dans la bretelle, la norme de l'accélération du véhicule ne peut excéder 10 m.s^{-2}.

1. Représenter le problème dans le repère de Frenet. Rappeler les composantes tangentielles et normales de l'accélération dans cette base.
2. Quelle est la composante de l'accélération nulle dans ce problème ? Justifier.
3. Montrer alors que Madame Michu ne peut prendre la bretelle à la vitesse v_0 au risque de quitter la route.
4. Expliquer pourquoi il ne faut pas freiner dans le virage au risque, encore, de quitter la route.
5. Quelle est la vitesse maximale $v_{\max}$ à laquelle Madame Michu peut prendre le virage ?

Exercices essentiels (traités en TD)

Exercice n°4 - Mouvement en spirale (★★)

Un point $M(t)$ décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire $(O, \overrightarrow{e_r}\ \overrightarrow{e_\theta})$ les coordonnées de $M(t)$ sont :

$$r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \omega t$$

où r_0, τ et ω sont des constantes positives.

1. Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.

2. En déduire l'accélération $\vec{a}(M)$ en coordonnées polaires.

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4{,}78$ tour/min^{-1}, $\tau = 2{,}0$ s et $r_0 = 4{,}0$ cm.

3. Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale ?

4. Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré ?

5. Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire de M.

Exercice n°5 - Ballon sonde (★★)

On modélise un ballon sonde par un point matériel de coor- données ($x(t)$, $z(t)$). Le ballon est lâché depuis le point O à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi-instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante tout au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée suivant l'axe (Ox), et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée à partir du sol :

$$v_x = \frac{z}{\tau}$$

où $\tau > 0$ est un temps caractéristique du mouvement.

1. Traduire l'énoncé $v_z = v_0 =$ cste sous la forme d'une équation différentielle simple. La résoudre.

2. De même, écrire et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, à exprimer en fonction de v_0 et τ.

3. Exprimer t en fonction de x .En déduire l'équation $z(x)$ de la trajectoire du ballon sonde.

4. Représenter cette trajectoire, et représenter le vecteur vitesse du ballon sonde à trois instants différents.

5. Exprimer les composantes de l'accélération du ballon sonde.

Pour aller plus loin

Exercice n°6 - Trajectoire elliptique d'une comète (★★)

Une comète est un petit corps céleste décrivant une orbite elliptique dont l'un des foyers est le Soleil. La comète est assimilée à un point M, et se déplace dans le plan (xOy) sur une ellipse d'équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où e et p sont des constantes (avec $0 < e < 1$). A $t = 0$, elle est au point P défini par $\theta = 0$, avec une vitesse $\vec{v_p} = v_p \vec{e_y}$ (avec $v_p > 0$).

1. Quelles sont les valeurs minimales et maximakle de r ? Pour quelles valeurs de θ sont-elles obtenues ?

2. Faire un schéma de la trajectoire. Faire apparaître le point P, le point A le plus éloigné de O, et également le point H d'ordonnée maximale et le point B d'ordonnée minimale. En M quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base locale cylindrique.

3. On suppose que l'accélération de M est toujours radiale. En déduire que $r^2\dot{\theta}$ est une constante (qu'on notera C). Déterminer C en fonction de p, e et v_p.

4. Déterminer la vitesse $\vec{v_A}$ de M au point A.

Résolution de problème
Une promenade difficile...

Un homme part se promener en marchant à une vitesse de 2 km/h. Une heure après, un autre homme part avec un chien pour le rejoindre, en marchant à une vitesse de 4 km/h. Le chien étant agité, il fait des aller-retours entre les deux hommes, à une vitesse de 10 km/h jusqu'à ce que les deux hommes se rejoignent.

▷ Quelle distance le chien aura-t-il parcouru ?

Éléments de réponse

Vrai / Faux

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Vrai 5. Faux 6. Vrai

Exercice n°1 :

▷ Durée de freinage : $t = t_a = \dfrac{v_0}{a} = 6,0$ s

▷ Distance de freinage : $d = \dfrac{v_0^2}{2a} = 74$ m

Exercice n°2 :

▷ $L = 500$ m.

Exercice n°3 :

5. $v_{\max} = 80$ km/h.

Exercice n°4 :

▷ Voir entraînement 10.12.

Exercice n°5 :

1. Équation différentielle : $\dot{z} = v_0$ qui se résout en $z(t) = v_0 t$ **2.** $x(t) = v_0 t^2/2\tau$
3. $t = \sqrt{2\tau x/v_0}$ donc $z(x) = \sqrt{2 v_0 \tau x}$ **5.** $a_x = v_0/\tau$ et $a_z = 0$.

Résolution de problème :

▷ Le chien aura parcouru 2 km.