Exercice n°5 - Fréquence centrale d'un filtre (★★)

1. Dans la limite très haute fréquence, $\xi \gg 1$ et la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \approx \frac{A_0}{jQ\xi}$$

donc

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \approx 20\log\frac{A_0}{Q\xi} = -20\log\xi + 20\log\frac{A_0}{Q}$$

Ainsi l'asymptote haute fréquence a pour pente -20 dB/décade et pour ordonnée à l'origine 20 $\log(A_0/Q)$.

De même, dans la limite très basse fréquence $\xi \ll 1$ la fonction de transfert est équivalente à

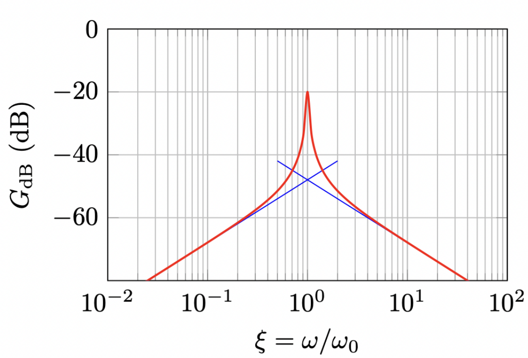
$$\underline{H} \approx \frac{A_0}{-j\frac{Q}{\xi}}$$

donc

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log \underline{H} \approx 20\log\frac{A_0\xi}{Q} = 20\log\xi + 20\log\frac{A_0}{Q}$$

Ainsi l'asymptote basse fréquence a pour pente +20 dB/décade et pour ordonnée à l'origine $20\log(A_0/Q)$.

2. Le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



3. On conclut à partir du diagramme de Bode que le filtre est un **passe-bande**.

4. Les valeurs des constantes sont :

$$A_0 = \frac{1}{1 = \frac{R_0}{R}}, \quad Q = \frac{RR_0}{R+R_0}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

5. On effectue la simplification donnée dans l'énoncé. On trouve :

$$a = \frac{D}{2L\sqrt{C_0}} \quad \text{et} \quad b = \frac{D}{\sqrt{C_0}}$$

6. Le plus petit déplacement détectable est $|x_{\min}| = 0,1$ mm.

Exercice n°6 - Filtre RLC (★★)

1. Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et C à un interrupteur ouvert, donc l'intensité dans la branche est nulle, et ainsi $v_s = 0+0$. Dans la limite très haute fréquence, C est équivalent à un fil donc on a directement $v_s = v_e$. **Le filtre est donc passe-haut.**

2. Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{R + jL\omega}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega}$$

Pour passer à la forme canonique, on multipilie en haut et en bas par $jC\omega$:

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Par identification du dénominateur avec la forme canonique, on en déduit

$$-LC\omega^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et de même,

$$jRC\omega = \frac{j\omega}{Q\omega_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

3. En basses fréquences,

$$\underline{H} \approx \frac{jx}{Q} \quad \text{donc} \quad G_{\mathrm{dB}} = 20\log x - 20\log Q$$

la pente de l'asymtptote est donc de -20 dB/décade.

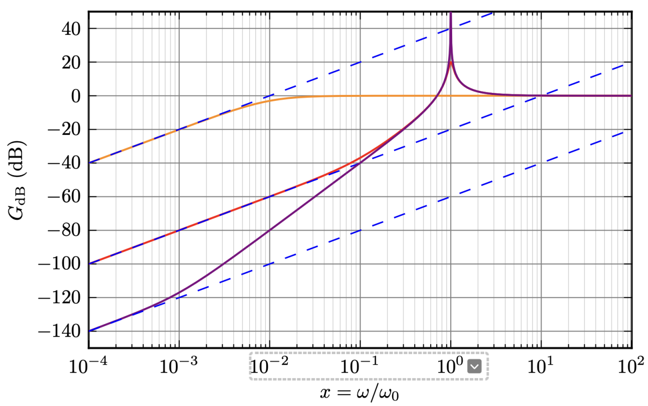
En hautes fréquences,

$$\underline{H} \approx \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \quad \text{soit} \quad G_{\text{dB}} = 0$$

l'asymtptote est donc horizontale à 0 dB.

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ($x = 10^0 = 1$), $G_{\text{dB}} = -20 \log Q = -20$ dB, on déduit $\log Q = 1$ soit $Q = 10$. On peut aussi utiliser le fait que $G_{\text{TBF}} = 0$ lorsque $x = Q$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ La question n'est pas simple : changer R modifie la valeur de Q, mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode, d'une part via l'intermédiaire de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote basse fréquence et d'autre part car elle contraint l'existence ou non d'une résonance. Une illustration est donnée sur la figure suivante.



Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe orange, 10 pour la courbe rouge (cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe violette.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. Le facteur de qualité du filtre est donc tel que tout le spectre du signal soit dans le domaine très basse fréquence du filtre : comme la pente de l'asymptote est de +20 dB/décade, il se comporte en dérivateur.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal, associées aux hautes fréquences, sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes, associées aux basses fréquences et qui décrivent son allure globale. Le facteur de qualité est donc tel que les basses fréquence du spectre soient coupées et les hautes fréquences transmises. Par exemple, si la fréquence fondamentale du signal est telle que $x = 10^{-3}$, alors la première situation pourrait correspondre à la courbe rouge de la figure ci-dessus et la deuxième à la courbe orange.