Exercice n°1 - Filtre ADSL

1. On isole les signaux téléphoniques (basses fréquences) avec un filtre passe-bas, et les signaux informatiques avec un filtre passe-haut. Un choix cohérent de fréquence de coupure est donc $f_0 = 10$ kHz.

2. En basse fréquence, les bobines se comportent comme des fils : $u_s = 0$. En haute fréquence, les bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts, donc $u_s \approx u_e$. Ainsi, le filtre sera **passe-haut**. Il permettra donc d'obtenir les signaux informatiques.

3. Grâce à un pont diviseur de tension sur la bobine de droite, on obtient :

$$\boxed{\underline{s} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \underline{u}} \tag{1}$$

4. Soit $\underline{Y}$ l'admittance regroupant la résistance de droite et les deux bobines. On a :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$$

D'après un pont diviseur de tension sur ce dipôle d'impédance $\underline{Z}$, on a :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} \times \underline{e} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}} \times \underline{e} \tag{2}$$

5. La fonction de transfert du filtre, définie par $\underline{H} = \underline{s}/\underline{e}$. On injecte ainsi (2) dans (1) :

$$\underline{s} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \underline{u} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \frac{1}{1 + R\underline{Y}} \underline{e}$$

En remplaçant par l'expression de $\underline{Y}$, on a :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R\left(\frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1\right)} = -\frac{(L\omega)^2}{R^2 + 3jRL\omega - (L\omega)^2}$$

On divise par R^2 pour avoir une partie réelle unitaire et de puissances croissantes de ω au dénominateur :

$$\underline{H} = \frac{-(L\omega/R)^2}{1 + j3\frac{L}{R}\omega - (L\omega/R)^2}$$

En posant $\omega_0 = \frac{R}{L}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient :

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}}$$

6. On a :

$$|\underline{H}(x)| = \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 9x^2}}$$

Ainsi, par définition,

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(x)| = 40 \log(x) - 10 \log[(1 - x^2)^2 + 9x^2]$$

7. A basses fréquences ($x \to 0$),

$$G_{\text{dB}} \approx 40 \log(x)$$

On a donc une **asymptote de pente +40 dB/décade à basses fréquences.**

À hautes fréquences ($x \to \infty$),

$$G_{\text{dB}} \approx -10 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

On a donc une **asymptote horizontale à 0 dB à hautes fréquences.**

On vérifie bien qu'il s'agit donc bien d'un filtre passe-haut (d'ordre 2, car +40 dB/décade à basses fréquences), ce qui est cohérent avec la première question de l'exercice.

8. D'après le résultat de la question 5, on a :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \quad \text{soit} \quad \boxed{R = 2\pi L f_0 = 2,5 \cdot 10^2\ \Omega}$$

Exercice n°2 - Sismomètre

1. Lorsque la masse est en équilibre dans le référentiel galiléen, les forces se compensent d'après la deuxième loi de Newton :

$$0 = k(L_1 - L_0) - mg \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{L_1 = L_0 + \frac{mg}{k}} \tag{3}$$

Remarque : attention au signe, l'axe vertical est ascendant !

2. Sur le schéma, on voit que la côte du point M est donnée par :

$$z_M = Z_p + (z_Q - z_P) - L$$

avec $(z_Q - z_P) = \text{cste}$. En dérivant deux fois par rapport au temps pour obtenir l'accélération, on a :

$$a(M) = \frac{d^2 Z_p}{dt^2} - \frac{d^2 L}{dt^2}$$

Avec $L(t) = L_1 - z(t)$, on obtient la formule demandée :

$$\boxed{a(M) = \frac{d^2 Z_p}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2}}$$

3. On applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel (R) au point M :

$$m\vec{a}(M) = m\left(\frac{d^2 Z_p}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2}\right)\vec{u}_z = m\left(\frac{d^2 z}{dt^2} - a\omega^2\cos(\omega t)\right)\vec{u}_z$$

$$= -mg\vec{u}_z + k(L - L_0)\vec{u}_z + f\frac{dL}{dt}\vec{u}_z$$

$$= k(L - L_1)\vec{u}_z + f\frac{dL}{dt}\vec{u}_z \quad \text{d'après l'équation (3)}$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{f}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{k}{m}z = a\omega^2\cos(\omega t)}$$

On peut alors identifier : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{\lambda = \frac{f}{2\sqrt{km}}}$.

4. **A.N :** $\omega_0 = 10$ rad.s^{-1} et $\lambda = 1,05$.

5. L'équation caractéristique correspond à :

$$r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta = 4\lambda^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\lambda^2 - 1)$$

Le régime **apériodique critique** est celui pour lequel $\Delta = 0$, soit $\boxed{\lambda = 1}$.

Le régime transitoire correspondant s'écrit alors :

$$\boxed{z_{RT}(t) = e^{-\lambda t}(A + Bt)}$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

6. En utilisant la représentation complexe avec $\underline{b} = be^{-j\phi}$, on a :

$$\underline{b}(-\omega^2 + 2\lambda\omega_0 j\omega + \omega_0) = \omega^2 a \quad \text{soit} \quad \frac{\underline{b}}{a} = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + 2\lambda\omega_0 j\omega + \omega_0}$$

On en déduit ainsi, en prenant le module pour faire apparaître b/a :

$$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2\omega^2}}}$$

7. Les résultats sont conformes au graphe présenté, comme le montre le tableau ci-dessous :

Pour $\omega \to$	**0**	**∞**
$b/a \simeq$	**ω^2/ω_0^2**	**ω_0^2/ω^2**
$b/a \to$	**0**	**1**

7. Le sismographe rend le mouvement de P si $b/a \approx 1$ donc pour les **grandes fréquences**, c'est-à-dire pour $\omega \gg \omega_0$. Pour $\lambda = 1$, la durée du régime transitoire est minimale.

Exercice n°3 - Analyse spectrale

1. Chacun des signaux est la somme de deux sinusoïdes d'amplitude et de fréquences différentes :

$$u_e = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$u_s = B_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

Les deux fréquences ω_1 et ω_2, communes aux deux signaux sont $f_1 = 500$Hz et $f_2 = 5$ kHz. Les amplitudes des composantes du signal d'entrée sont respectivement : $A_1 = 1$ V et $A_2 = 0{,}5$ V. Celles du signal de sortie sont $B_1 = 0{,}9$ V et $B_2 = 0{,}1$ V.

2. On donne ci-contre l'allure du spectre de Fourier correspondant.

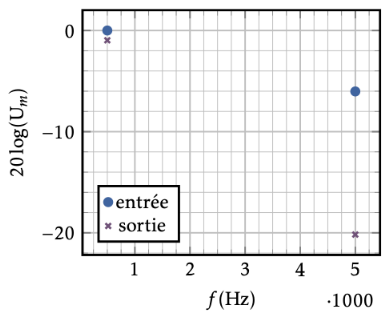

Figure 1: Spectre de Fourier des signaux u_e (point) et u_s (croix)

3. On observe que la composante de fréquence élevée est davantage atténuée, **le filtre est donc passe-bas**. On peut vérifier que les composantes basse fréquences de l'entrée sont en phase. En revanche, la composante haute de fréquence de la sortie est en quadrature retard par rapport à l'entrée, comme il se doit pour un passe bas du premier ordre.

En remarquant que la composante à f_2 5 kHz est atténuée d'un facteur 4 environ, on peut écrire :

$$\frac{B_2}{A_2} = G(f_2) = \frac{1}{4}$$

Or le gain de la fonction de transfert pris en f_2 (cf filtre passe-bas du premier ordre) s'écrit

$$G(f_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_2/f_c)^2}} \approx \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{1+15}}$$

On en déduit :

$$\left(\frac{f_2}{f_c}\right)^2 \approx 15 \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_c = \frac{f_2}{\sqrt{15}} \approx 1{,}3 \text{ kHz}}$$

4. Le signal est périodique de période $5 \cdot 10^{-3}$ s, donc de fréquence fondamentale $f_1 = 200$ Hz. On observe, outre la composante à fréquence nulle, des composantes de Fourier à 200 Hz, 600 Hz, 1 kHz...distantes de 400 Hz. En effet les harmoniques de rang pair (300 Hz, 500 Hz ...) sont nulles pour un créneau.

La composante de fréquence nulle correspond à la valeur constante non nulle (offset) du signal.

5. Pour chacun des harmoniques, l'amplitude de sortie s'obtient en multipliant celle d'entrée par le gain. En décibels, on ajoute donc à la valeur d'entrée celle du gain du diagramme de Bode. On obtient le spectre représenté figure 2.

6. Le signal se compose principalement de la composante continue, du fondamental et du premier harmonique, non atténués mais surtout du deuxième harmonique dont l'amplitude devient environ $10^{14/20} \approx 5$ fois plus grande que le fondamental. On en déduit l'allure de l'évolution temporelle représentée ci-dessous.

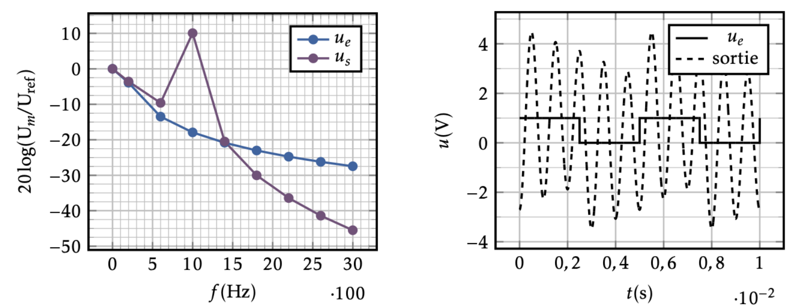

Figure 2: Spectre du signal en sortie du filtre et représentation temporelle