

Ceinture noire - Filtre de Colpitts

1. Les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts à basses fréquences, les bobines comme des fils. A hautes fréquences c'est l'inverse. On a alors à basses fréquences $u_2 = 0$ et à hautes fréquences $u_2 = 0$.

2. Cf DM n°4 (filtre ADSL) pour la méthode : on réalise un premier diviseur de tension pour exprimer u_2 en fonction de u :

$$u_2 = \frac{Z_{C2}}{Z_{C2} + Z_{C1}} u$$

puis on réalise une impédance équivalente avec C_1 et C_2 en série, le tout en parallèle avec L . On trouve alors, en posant $C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

$$\boxed{H_0 = \frac{C_e}{C_2}} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C_e}{L}}} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_e}}}$$

3. Le gain en décibels s'écrit :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}(\omega)|) = 20 \log(H_0) - 10 \log(1 + Q^2(x - 1/x)^2)$$

4. Etude asymptotique du gain :

- à basses fréquences, $G_{dB} \simeq 20 \log(H_0) - 20 \log(Q/x) = 20 \log(H_0) - 20 \log(Q) + 20 \log(x)$: on a donc une **asymptote de pente +20dB/décade**.
- à hautes fréquences, $G_{dB} \simeq 20 \log(H_0) - 20 \log(Qx) = 20 \log(H_0) - 20 \log(Q) - 20 \log(x)$: on a donc une **asymptote de pente -20dB/décade**.

Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bande, en accord avec les prédictions théoriques de la question 1.

5. La phase s'écrit :

$$\phi(x) = \arg(\underline{H}(x)) = \arg(H_0) - \arg(1 + jQ(x - 1/x))$$

On a donc :

$$\boxed{\phi(x) = -\arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]}$$

- à basses fréquences, $\phi \simeq \frac{\pi}{2}$ et à hautes fréquences, $\phi \simeq -\frac{\pi}{2}$.

Ceinture bleue - Etude d'un filtre du premier ordre

1. ▷ Pour $\omega \rightarrow 0$, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. On voit alors que u_s est donnée par un diviseur de tension, donc non nulle.

▷ Pour $\omega \rightarrow \infty$, le condensateur est équivalent à un fil de connexion. Dans ce cas, $u_s = 0$.

On en déduit qu'il s'agit d'un filtre **passe-bas**.

2. On détermine d'abord l'admittance équivalente à l'association parallèle de R_2 et C :

$$\underline{Y}_{\text{éq}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega$$

On obtient ensuite l'expression de u_s en fonction de u_e grâce à un pont diviseur de tension :

$$u_s = \frac{Z_{\text{éq}}}{R_1 + Z_{\text{éq}}} = \frac{1}{1 + R_1 \underline{Y}_{\text{éq}}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1 C \omega}$$

La fonction de transfert s'écrit ainsi :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1 C \omega}$$

En identifiant avec la forme canonique donnée dans l'énoncé, on a :

$$\frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + jR_1 C \omega} = \frac{1}{A + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Ainsi, $\boxed{A = 1 + \frac{R_1}{R_2} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{R_1 C}}$.

3. Le filtre est d'ordre 1, il y a donc une seule pulsation de coupure ω_c , définie par :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Le gain du filtre s'écrit ici :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Le gain maximal est atteint lorsque $\omega \rightarrow 0$: auquel cas, on voit que $G_{\max} = \frac{1}{A}$. On peut ainsi écrire l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{A + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{A\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega_c = A\omega_0}$$

4. (a) La fonction de transfert s'écrit, en fonction de f :

$$\boxed{\underline{H}(f) = \frac{1}{A + j\frac{f}{f_0}}}$$

4. (b) Par définition,

$$G_{dB}(f) = 20 \log(G(f)) = -10 \log \left[A^2 + \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right]$$

La phase s'écrit quant à elle :

$$\boxed{\varphi(f) = \arg(\underline{H}(f)) = -\arctan \left(\frac{f}{Af_0} \right)}$$

4. (c) Etudions les asymptotes du gain en décibels.

▷ $f \rightarrow 0$, $G_{dB} \rightarrow -20 \log(A) = -20 \text{ dB}$: on a donc une **asymptote horizontale à -20 dB à basses fréquences**.

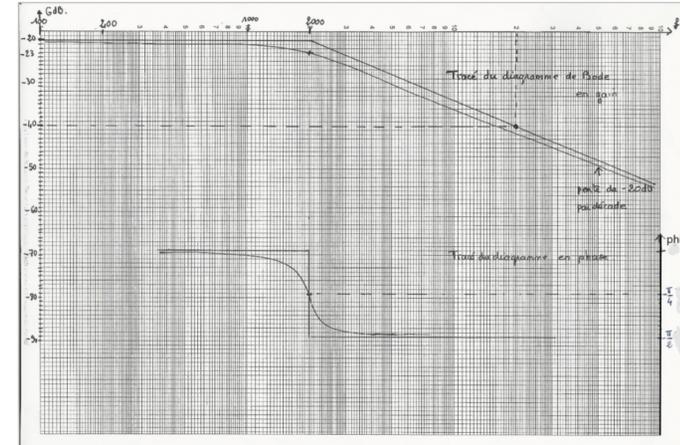
▷ $f \rightarrow \infty$, $G_{dB} \rightarrow 20 \log(f_0) - 20 \log(f) = -20 \text{ dB}$: on a donc une **asymptote oblique de pente -20 dB/décade à hautes fréquences**.

Etudions les asymptotes de la phase.

▷ $f \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow 0 = -20 \text{ dB}$: on a donc une **asymptote horizontale à 0 rad**.

▷ $f \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow -\pi/2 = -20 \text{ dB}$: on a donc une **asymptote horizontale à $-\pi/2 \text{ rad}$** .

(c) et (d) Le diagramme de Bode asymptotique et réel est donné ci-dessous.



5. Dans le cas où le signal d'entrée a une pulsation $1000\omega_0$, on peut calculer l'amplitude grâce au gain du filtre :

$$G(1000\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{A^2 + \left(\frac{1000\omega_0}{\omega_0} \right)^2}} \approx 10^{-3} = \frac{U_s}{U_e}$$

Ainsi, l'amplitude est atténuée d'un facteur 1000 : $U_s = 0,01 \text{ V}$.

La phase du signal de sortie est dans ce cas égale à $-\pi/2$ (par lecture sur le diagramme de Bode donné ci-dessus). Le signal de sortie est donc considérablement atténué et s'écrit ainsi :

$$\boxed{u_s(t) = 0,01 \cos(1000\omega_0 t)}$$

6. Si le signal d'entrée est un signal créneau de pulsation $1000\omega_0$, on se place dans le domaine intégrateur du filtre : l'intégrale d'un signal créneau est un signal triangulaire de même pulsation.

7. En faisant un produit en croix sur la fonction de transfert, on a :

$$\underline{U}_s \left(A + \frac{1}{\omega_0} j\omega \right) = \underline{U}_e$$

En repassant en écriture temporelle (une multiplication par $j\omega$ revient à dériver le signal temporellement, on en déduit :

$$\boxed{\frac{du_s}{dt} + A\omega_0 u_s = \omega_0 u_e}$$

Seconde partie : Prévention des séismes

1. λ s'exprime en s^{-1} .

2. Les forces s'exerçant sur le point matériel P sont :

- le poids $\vec{P} = Mg_0\vec{e}_z$
- la force exercée par le ressort $\vec{F} = -k(L(t) - L_0)\vec{e}_z$
- La force de frottement fluide $\vec{f} = -2\lambda M \frac{dL}{dt} \vec{e}_z$

Lorsque la masse est à l'équilibre, $L(t) = L_{\text{éq}}$, $\frac{dL}{dt} = 0$ et $\frac{d^2L}{dt^2} = 0$. Ainsi, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = Mg_0\vec{e}_z - k(L_{\text{éq}} - L_0)\vec{e}_z = \vec{0}$$

On en déduit ainsi, par projection selon \vec{e}_z :

$$L_{\text{éq}} = L_0 + \frac{Mg_0}{k}$$

3. Si A est immobile, le point P est repéré par $\vec{OP} = (L_{\text{éq}} + Z(t))\vec{e}_z$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors, en projection selon \vec{e}_z :

$$M \frac{d^2Z}{dt^2} = Mg_0 - k(L(t) - L_0) - 2\lambda M \frac{dL}{dt}$$

soit, puisque $\frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dt}$:

$$M \frac{d^2Z}{dt^2} + 2\lambda M \frac{dZ}{dt} + kL(t) = Mg_0 + kL_0 = kL_{\text{éq}}$$

d'où

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\lambda \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 L(t) = \omega_0^2 L_{\text{éq}} \iff \frac{d^2Z}{dt^2} + 2\lambda \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = 0$$

4. L'équation précédente est une EDL homogène du second ordre. Son équation caractéristique est $x^2 + 2\lambda x + \omega_0^2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$.

Le régime critique correspond au discriminant nul : $\lambda = \omega_0$, la racine de l'équation caractéristique est $x = -\omega_0$ et $Z(t)$ s'écrit :

$$Z(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

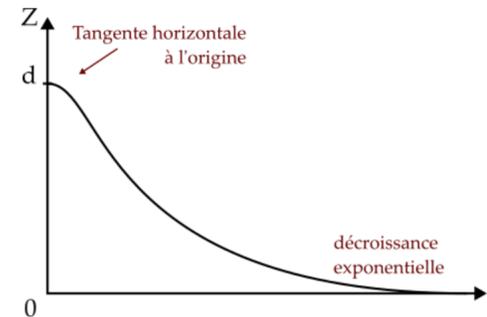
5. Conditions initiales :

- $Z(0) = d = B$, donc $Z(t) = (At + d)e^{-\omega_0 t}$
- $\dot{Z}(0) = 0 = A - \omega_0 d$

Finalement,

$$Z(t) = d(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

Le tracé est donné ci-dessous.



6. A présent, le point A est en mouvement, ce qui modifie l'expression du vecteur position $\vec{OP} = (Z + z_{\Sigma} + L_{\text{éq}})\vec{e}_z$, où Z représente toujours l'élongation du ressort $Z(t) = L(t) - L_{\text{éq}}$. Le PFD appliqué au point P s'écrit toujours :

$$\frac{d^2\vec{OP}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{F}$$

Mais la projection sur \vec{e}_z donne maintenant :

$$M(\ddot{Z} + \ddot{z}_{\Sigma}) = Mg_0 - k(Z + L_{\text{éq}} - L_0) - 2\lambda M\dot{Z}$$

d'où

$$\ddot{Z} + 2\lambda\dot{Z} + \omega_0^2 = -\ddot{z}_{\Sigma}$$

7. Passons en représentation complexe :

$$-\omega^2 \underline{A}_m + 2\lambda i\omega \underline{A}_m + \omega_0^2 \underline{A}_m = \omega^2 z_m \quad \text{soit} \quad \underline{A}_m \left(r^2 - 1 + \frac{2i\lambda}{\omega} \right) = z_m$$

On en déduit :

$$\underline{A}_m = \frac{z_m}{r^2 + \frac{ir}{Q} - 1}$$

8. Dans le régime critique ($Q = 1/2$) de pulsation ω_0 ($r = 1$), on obtient

$$\underline{A}_m = -\frac{iz_m}{2}$$

9. L'amplitude réelle est le module de l'amplitude complexe

$$A_m = |\underline{A}_m| = \frac{z_m}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + \left(\frac{r}{Q}\right)^2}}$$

10. Pour trouver les extremums de cette fonction toujours positive, on peut étudier la fonction $(r^2 - 1)^2 + r^2/Q^2$: après calcul, on montre que la racine r pour avoir une dérivée nulle vaut :

$$r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

ce qui impose une condition sur Q :

$$Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La pulsation de résonance est alors donnée par :

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Pour un facteur de qualité très grand, on a :

$$\omega_r \simeq \omega_0 \quad \text{et} \quad A_m \simeq Qz_m$$

11. On étudie la fonction de transfert $\underline{H}(i\omega) = \frac{1}{r^2 + i\frac{r}{Q} - 1}$.

- pour $\omega \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$, $\underline{H} \simeq 1/r^2 = (\omega/\omega_0)^2$, donc $G_{dB} = 40 \log(\omega/\omega_0)$: le gain présente une asymptote de pente +40dB/décade à basse fréquence.
- pour $\omega \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$, $\underline{H} \simeq 1$, donc $G_{dB} = 0$: le gain présente une asymptote horizontale à 0dB.

Ce filtre passe-haut est représenté sur la figure de l'énoncé, on y reconnaît le diagramme asymptotique en pointillés.

12. Pour que le sismographe suive au plus près les mouvements du sol, il faut se placer dans la bande de fréquence où $\underline{H} \simeq 1$. Donc il faut choisir $\omega_0 < \omega_1$.