Ceinture bleue

Devoir surveillé de physique n°4

(Durée : 2 heures)

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte 4 pages, et comporte deux parties indépendantes.
L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

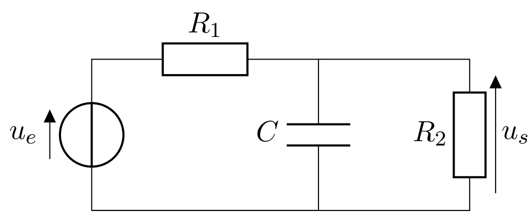
AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

⋆ ⋆ ⋆

Première partie : Étude d'un filtre du premier ordre

Le circuit ci-dessous est composé de 2 résistances R_1 et R_2 et d'un condensateur de capacité C. Il est alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = E\cos(\omega t)$.



1. Déterminer sans calcul la nature du filtre.

2. Montrer que la fonction de transfert du filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{A + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

   Exprimer A et ω_0 en fonction de R_1, R_2, et C.

On utilisera les notations suivantes pour la suite du problème :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega))$$

3. Définir puis déterminer (à partir de la relation de définition) la ou les pulsations de coupure ω_c à -3 dB en fonction de A et ω_0.

4. On souhaite dans cette question, tracer le diagramme de Bode du filtre en utilisant comme variable la fréquence f.

   (a) Exprimer la fonction de transfert en fonction de f, $f_0 = \omega_0/2\pi$ et A.

   (b) Exprimer le gain en décibels $G_{dB}(f)$ et la phase $\varphi(f)$ du filtre.

   (c) Établir l'équation des asymptotes (à hautes et basses fréquences) pour la phase et le gain en décibels, puis tracer le diagramme de Bode asymptotique pour $A = 10$ et $f_0 = 200$Hz sur le papier semi-log fourni, **à rendre avec la copie**.

   (d) Compléter le tracé avec le diagramme de Bode réel.

5. On suppose que $u_e(t) = 10\cos(1000\omega_0 t + \pi/2)$, déterminer l'expression de la tension de sortie $u_s(t)$ en fonction de ω_0 pour $A = 10$. Commenter la particularité du signal obtenu.

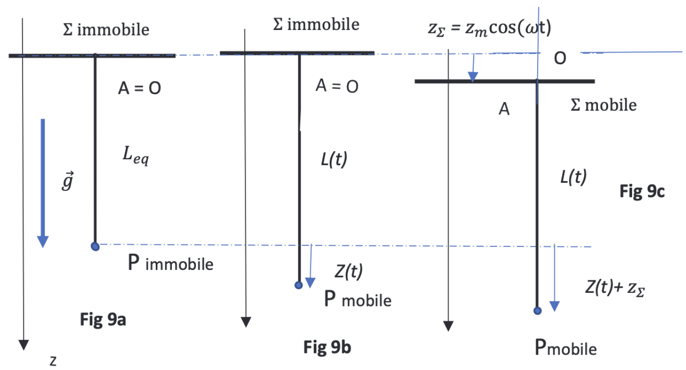
6. On suppose $u_e(t)$ une tension créneau de pulsation $1000\omega_0$. Décrire sans calcul l'allure de $u_s(t)$.

7. Déduire de la fonction de transfert établie à la question 21, l'équation différentielle vérifiée par $u_s(t)$ et $u_e(t)$ sous sa forme canonique en fonction de A et ω_0.

Seconde partie : Prévention des séismes

Adapté de Banque PT 2023

Les centrales géothermiques ont un inconvénient : il semblerait que les forages en profondeur perturbent le milieu et engendrent des séismes dont l'hypocentre serait proche de la zone de forage de l'eau chaude en profondeur. Certaines stations sont équipées de sismographes moins pour prévenir les risques que pour étudier justement les conséquences éventuelles des forages et aussi l'activité sismique au voisinage de la faille. Pour mesurer vraiment le mouvement sismique du sol il faut une batterie de 3 sismographes un vertical et deux horizontaux. Nous allons nous intéresser au seul sismomètre vertical (figure ci-dessous).



Entre A et P : Ressort de raideur k et de longueur à vide L_0

La verticale Oz est orientée vers le bas et le champ de pesanteur noté $\vec{g} = g_0\vec{e_z}$. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

On étudie le mouvement vertical d'un point matériel P, de masse M, lié à un ressort linéaire vertical de raideur $k = M\omega_0^2$ et de longueur à vide L_0. On note la longueur instantanée du ressort. L'autre extrémité du ressort est fixée en A à un plateau horizontal Σ qui peut subir un mouvement de translation verticale.

Le point P est soumis de plus à une force de frottement fluide suivant une loi de la forme .

$$\vec{f} = -2\lambda M\frac{dL}{dt}\vec{e_z}$$

Le plateau Σ est supposé immobile.

8. Déterminer l'unité de λ.

9. Exprimer chaque force s'exerçant sur le point matériel P, en fonction du vecteur unitaire $\vec{e_z}$.

10. Montrer que la longueur à l'équilibre du ressort à l'équilibre (fig 9a) s'écrit :

$$L_{\text{éq}} = L_0 + \frac{Mg_0}{k}$$

11. Le point P étant en mouvement (fig 9b), montrer que l'équation différentielle à laquelle obéit $Z(t) = L(t) - L_{\text{éq}}$ s'écrit :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\lambda\frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z(t) = 0$$

12. À quelle valeur du coefficient de frottement λ correspond le régime critique ? Exprimer alors la forme générale de la solution sans chercher à déterminer les valeurs des constantes liées aux conditions initiales.

13. Tracer l'allure de $Z(t)$ correspondant au régime critique dans le cas $Z(t=0) = d$ et $\dot{Z}(0) = 0$.

On suppose que le plan Σ est animé d'un mouvement forcé harmonique (figure 9c) en notant i le nombre imaginaire pur tel que $i^2 = -1$:

$$z_\Sigma(t) = z_m \cos(\omega t) = \text{Re}\left(z_m e^{i\omega t}\right)$$

14. Montrer que dans ce cas, le principe fondamental de la dynamique projeté sur $\vec{e_z}$ s'écrit :

$$\ddot{Z} + 2\lambda\dot{Z} + \omega_0^2 Z = -\ddot{z}_\Sigma$$

15. Établir en utilisant les grandeurs complexes l'expression de l'amplitude complexe $\underline{A_m}$ de $Z(t) = \underline{A_m} e^{i\omega t}$ en fonction de z_m, $r = \omega_0/\omega$ et $Q = 2\lambda/\omega_0$.

16. Que devient cette expression pour le régime critique de pulsation ?

17. Exprimer l'amplitude réelle A_m du signal.

18. Montrer qu'il existe une valeur minimale du facteur de qualité Q à partir de laquelle l'amplitude réelle A_m passe par un maximum pour une pulsation donnée que l'on calculera. Préciser, pour un facteur de qualité Q très grand, les expressions de la pulsation correspondante et de l'amplitude.

19. Établir les comportements à haute fréquence et à basse fréquence du filtre $\underline{H}(\omega) = \dfrac{\underline{A_m}}{z_m}$. Justifier que le diagramme de Bode a l'allure représentée ci-dessous.

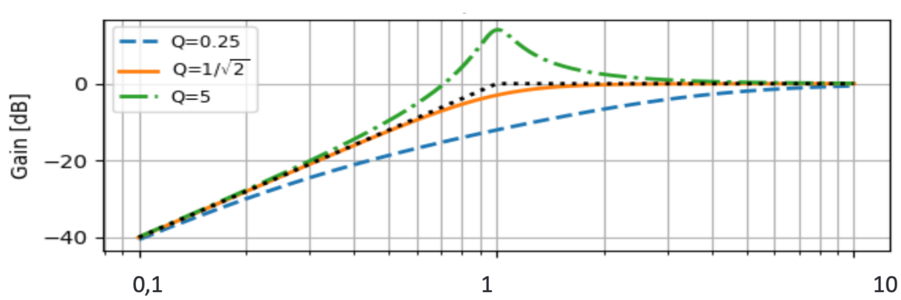


Figure 1: Diagramme de Bode : représentation du gain en décibels en fonction de $x = \omega/\omega_0$

20. On veut que le sismographe suive au plus près les mouvements sismiques verticaux du lieu (proche du forage donc de l'épicentre) où on l'a placé. On sait par des expériences antérieures que le spectre du déplacement du sol est dans le domaine allant de ω_1 à ω_2 comment devra-t-on choisir ω_0 ?

Fin du sujet