Exercice n°2 - Longueur d'une piste de décollage (★★)

$\rightsquigarrow$ Voir entraînement 10.3.

Exercice n°3 - Sortie d'autoroute (★★)

1. Cf. cours.

2. La voiture est assimilée à un point matériel M décrivant une trajectoire circulaire de centre I et de rayon R : on utilise la base de Frenet. Les éléments cinématiques sont :

$$\vec{v}(M) = v\,\vec{e}_T \quad \text{et} \quad \vec{a}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\vec{e}_N$$

Or, puisque la vitesse est constante en norme, la composante tangentielle de l'accélération est nulle.
3. La norme de l'accélération s'écrit :

$$a_0 = \frac{V_0^2}{R} = 26 \text{ m/s}^2$$

Cette valeur est supérieure à la norme de sécurité.

4. Si la voiture freine, la norme de sa vitesse v dépend maintenant du temps, et l'accélération s'écrit :

$$\vec{a}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

Au moment où le véhicule commence à freiner, sa vitesse est V_0, et la norme de son accélération s'écrit donc

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V_0^2}{R}\right)^2} > a_0$$

Le freinage va donc avoir pour conséquence **d'augmenter la norme de l'accélération.**

5. En supposant que la bretelle est parcourue à vitesse constante, il faut que l'accélération ne dépasse pas la valeur maximale $a_{\max} = V_{\max^2}/R$. Donc

$$\boxed{V_{\max} = \sqrt{Ra_{\max}} = 80 \text{ km/h}}$$

Exercice n°4 - Mouvement en spirale (★★)

$\rightsquigarrow$ Voir entraînement 10.12.

Exercice n°5 - Ballon sonde (★★)

1. D'après l'énoncé, $v_z = v_0$ constante. L'équation différentielle s'écrit donc $\dot{z} = v_0$. On intègre pour trouver $z(t)$:

$$z(t) = v_0 t + C_1$$

où C_1 se déterminer à partir des conditions initiales :

$$\dot{z}(0) = 0 \quad \text{d'où} \quad C_1 = 0$$

Ainsi, $\boxed{z(t) = v_0 t}$.

2. Par ailleurs, $v_x = z/\tau$ et en injectant l'expression de z déterminée à la question précédente, on aboutit à

$$\dot{x} = \frac{v_0 t}{\tau}$$

Par intégration,

$$x(t) = \frac{v_0 t^2}{2\tau} + C_2$$

or, $x(0) = 0$ donc $C_2 = 0$, on en conclut :

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0 t^2}{2\tau}}$$

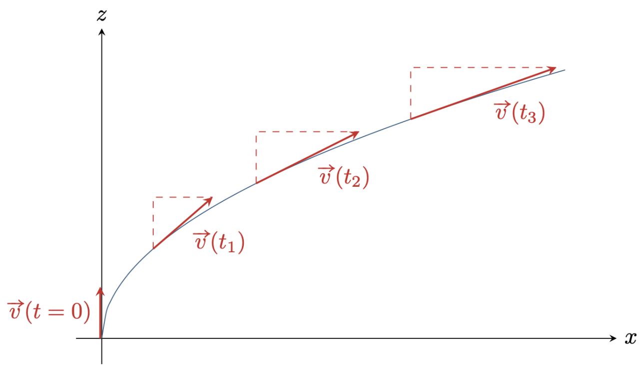
3. Comme le ballon sonde est lâché depuis $x = 0$ et qu'à tout instant $v_x \geq 0$, alors $x(t) > 0$ pour tout t. En inversant la loi horaire sur x, on obtient

$$t = \sqrt{\frac{2\tau x}{v_0}}$$

puis on remplace dans l'expression de z,

$$\boxed{z(x) = \sqrt{2v_0\tau x}}$$

4. Le tracé est donné ci-dessous.



5. Par dérivation des composantes de la vitesse, on trouve

$$\boxed{a_x = \ddot{x} = \frac{v_0}{\tau} \quad \text{et} \quad a_z = \ddot{z} = 0}$$