

# Chapitre 11 - Dynamique du point

*Vincent Combette*

## Table des matières

<b>I Introduction - Interactions fondamentales</b>	<b>2</b>
<b>II Notion de force</b>	<b>4</b>
II.1 Gravitation . . . . .	4
II.2 Interaction électromagnétique . . . . .	5
II.3 Forces de contact . . . . .	6
<b>III Lois de Newton</b>	<b>9</b>
III.1 Quantité de mouvement . . . . .	9
III.2 Première loi de Newton . . . . .	10
III.3 Deuxième loi de Newton . . . . .	11
III.4 Troisième loi de Newton . . . . .	12
<b>IV Mouvements dans un champ de pesanteur uniforme</b>	<b>13</b>
IV.1 Chute libre . . . . .	13
IV.2 Chute avec frottements linéaires . . . . .	15
IV.3 Pendule simple . . . . .	15

## I Introduction - Interactions fondamentales

Dans l'état actuel de nos connaissances, l'étude de la matière depuis l'échelle subatomique jusqu'à l'échelle cosmique permet de postuler l'existence de seulement quatre interactions fondamentales permettant d'expliquer tous les phénomènes de la Nature. Ces interactions se caractérisent par des intensités et des échelles d'action très différentes (cf. Table 2):

- L'interaction **gravitationnelle**. Dans un cadre classique, elle agit entre les corps massiques. Elle est toujours attractive. Dans le cadre de la relativité générale elle est équivalente à une courbure de l'espace temps, courbure qui est provoquée par la présence de matière ou d'énergie.
- L'interaction **électromagnétique**. Agit entre les corps chargés électriquement. Attractive ou répulsive, selon le signe des charges en interaction.
- L'interaction **forte**. Agit à très courte distance entre les nucléons d'un noyau, et est ainsi responsable de sa cohésion.
- L'interaction **faible**. Agit entre certaines particules fondamentales. Elle explique notamment l'instabilité du neutron et la radioactivité bêta.

Interactions	Grandeur physique	Portée	Théories
Gravitationnelle	Masse $m$	Infinie	Mécanique classique, relativité générale
Électromagnétique	Charge $q$	Infinie	Electromagnétisme classique, électrodynamique quantique
Forte	Charge de couleur	$d \simeq 10^{-15}\text{m}$	Chromodynamique quantique
Faible	Isospin faible	$d \simeq 10^{-17}\text{m}$	Théorie électrofaible

Table 1: Les quatre interactions fondamentales

C'est Isaac Newton, dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, qui le premier unifia plusieurs grands phénomènes physiques, à savoir la mécanique céleste et la chute des corps, grâce à sa description de la gravitation. Grâce aux travaux de Maxwell sur l'électromagnétisme, des phénomènes apparemment indépendants comme l'induction et la propagation de la lumière furent unifiés grâce aux quatre équations portant son nom, fondant la théorie électromagnétique. À l'heure actuelle, les quatre interactions fondamentales sont décrites séparément : les interactions faible, électromagnétique et forte le sont en termes de champs quantiques dans un même formalisme mathématique, appelé **modèle standard**, dont le succès théorique s'est traduit ces dernières années par la découverte du boson de Higgs au CERN. La gravitation, quant à elle, s'explique très bien dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale, qui s'est également traduite par de nombreuses découvertes depuis plus d'un siècle, dont celle des ondes

gravitationnelles détectées par l'interféromètre LIGO. Toutefois, ces deux descriptions sont indépendantes, et les tentatives d'unification paraissent (pour l'instant ?) vaines...

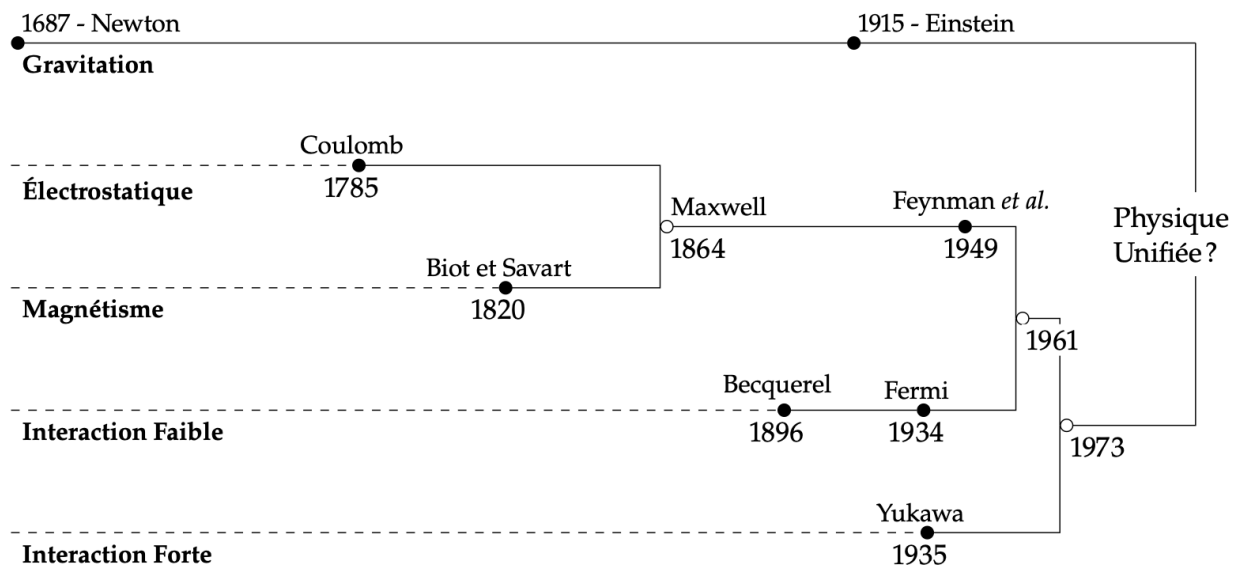


Figure 1: Chronologie des différentes théories

## II Notion de force

Toutes les forces connues dérivent d'une de ces quatre interactions fondamentales. Néanmoins, utiliser directement les théories qui les décrivent est une perte de temps considérable pour modéliser des situations courantes. Il est donc d'usage d'utiliser des expressions pour des forces rencontrées couramment, que nous donnons dans cette partie.

### II.1 Gravitation

La gravitation est une interaction **attractive** qui concerne toute la matière. Deux corps quelconques modélisés par deux points matériels de masses  $m_1$  et  $m_2$  s'attirent proportionnellement au produit de leur masse, et inversement proportionnellement au carré de la distance qui les sépare.

#### ♥ Force de gravitation

L'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses  $m_1$  et  $m_2$  séparés d'une distance  $r$  se traduit par une force

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$G$  désigne la constante de gravitation universelle

$$G \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

**Application** - Retrouver l'unité SI de  $G$ .

Lorsqu'on approche un point matériel  $M$  de masse  $m$  près d'un système matériel  $\mathcal{S}$  ce dernier exerce sur  $M$  une force de gravitation qui dépend de la répartition de la matière au sein de  $\mathcal{S}$ . Si l'on décompose le système en un ensemble de  $N$  points matériels  $P_i$  de masse  $m_i$ , et en supposant que la force de gravitation obéit au principe de superposition, on pourra écrire que le système  $\mathcal{S}$  exerce sur  $M$  une force

$$\vec{F} = m \sum_{i=1}^N -G \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i \equiv m \vec{g}(M)$$

où  $\vec{u}_i$  est un vecteur unitaire orienté de  $P_i$  vers  $M$ . Par définition,  $\vec{g}(M)$  désigne le **champ de gravitation** ou **champ de pesanteur** créée au point  $M$ . Au voisinage du sol, on peut montrer que  $\vec{g}$  est uniforme et a pour intensité

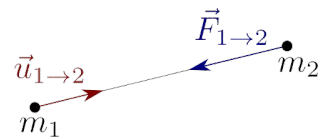


Figure 2: Interaction gravitationnelle entre deux corps  $m_1$  et  $m_2$

En 1798, le physicien britannique Henry Cavendish réussit le tour de force de "peser la Terre" à l'aide d'une balance de torsion (encore utilisée aujourd'hui, bien que raffinée), ce qui revient indirectement à déterminer  $G$ . Aujourd'hui  $G$  reste la constante fondamentale la moins bien connue :

$$G = (6,67430 \pm 0,0015) \cdot 10^{-11} \text{ USI}$$

Vous le verrez en deuxième année : une boule à symétrie sphérique de masse  $M$  et de rayon  $R$  produit, à l'extérieur de la boule, un champ de gravitation identique à celui qu'exercerait une masse ponctuelle de masse  $m$  située au centre de la boule :

$$\vec{g}(r \geq R) = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r$$

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

**Application** - Calculer numériquement  $g$  pour  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg et  $R_T = 6371$  km.

Tant que la dimension du corps reste faible devant le rayon terrestre, on montre que le poids s'applique au centre de masse  $G$ . C'est pourquoi lorsque l'on étudie la chute des corps on assimile ces derniers à des points matériels.

♥ Poids

Le poids d'un corps résulte de l'attraction gravitationnelle de la Terre sur le système étudié :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

avec  $\vec{g}$  le **champ de pesanteur terrestre** ou **accélération de pesanteur terrestre**, ayant pour norme  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

Astre	Champ de pesanteur
Lune	$1,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Mars	$3,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Vénus	$8,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Terre	$9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Jupiter	$24,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

Table 2: Champs de pesanteur dans le système solaire

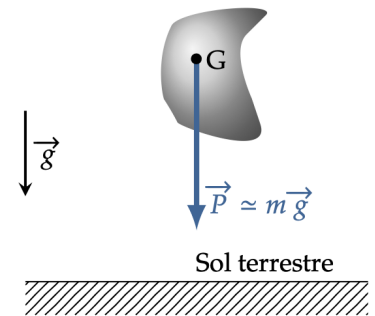


Figure 3: Poids d'un corps

II.2 Interaction électromagnétique

L'interaction électromagnétique possède deux aspects : la force électrique et la force magnétique. La force électrique est soit **attractive** dans le cas où les particules mises en jeu possèdent des charges de signes opposées, ou **répulsive** dans le cas contraire. De la même manière que deux corps massifs interagissent par le biais de leur masse, et  $\propto \frac{1}{r^2}$ , les particules chargées interagissent par le biais de leurs charges, toujours inversement proportionnellement au carré de la distance qui les sépare.

Force électrostatique (ou force Coulombienne)

L'interaction électrostatique entre deux charges  $q_1$  et  $q_2$  séparées d'une distance  $r$  se traduit par une force

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$\epsilon_0$  désigne la **permittivité diélectrique du vide** :

$$\epsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$$

Il est possible de réécrire la force de Coulomb pour faire apparaître la contribution de la charge 1 sur une charge test  $q$  :

Force électrostatique	Force de gravitation
Charges $q_1$ et $q_2$	Masses $m_1$ et $m_2$
$\propto \frac{1}{r^2}$	$\propto \frac{1}{r^2}$
Constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	Constante $-G$

Table 3: Analogie électro-gravitationnelle

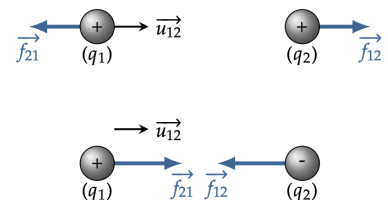


Figure 4: Interaction électrostatique entre deux corps  $q_1$  et  $q_2$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q \times \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = q \vec{E}(M)$$

Ainsi, la charge  $q_2$ , située au point  $M$ , subit une interaction de la part de  $q_1$  se traduisant par un **champ électrique**  $\vec{E}(M)$ , en  $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Par ailleurs, lorsque des charges sont mises en mouvement, elles produisent un **champ magnétique** noté  $\vec{B}$ , dont l'unité est le Tesla (T). La force magnétique s'exerçant sur une charge test  $q$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  est donnée par :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

La somme des contributions électrique et magnétique est appelée force de Lorentz, et sera traitée en détails dans le chapitre 14.

### Force de Lorentz

Une charge test  $q$  placée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  subit la force de Lorentz

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

**Application** - On considère un électron de vitesse  $10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  dans le champ de pesanteur terrestre, soumis à un champ électrique de norme  $1 \text{ V/m}$ , ainsi qu'au champ magnétique terrestre de norme  $50 \mu\text{T}$ . Évaluer le rapport  $F_G/F_{\text{el}}$ , ainsi que le rapport  $F_G/F_{\text{mag}}$ . Conclure.

Dans le cas où la charge test  $q$  est placée au sein d'une distribution de  $N$  charges, le champ électrique se généralise :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_{i \rightarrow 2}$$

L'unité du champ magnétique est nommée en l'honneur de Nikola Tesla (1856-1943), inventeur du courant alternatif permettant la distribution massive de l'électricité.

## II.3 Forces de contact

Lorsque deux corps sont mis en contact, les atomes présents sur leurs surfaces interagissent par le biais de l'interaction électrostatique de courte portée. Ces interactions conduisent à des effets macroscopiques, que l'on modélise par des forces de contact.

### • Contact solide-solide

Soit un corps en contact avec un support. L'action du support sur l'objet est appelée la **réaction du support**. On la divise en deux composantes :

- la réaction **normale**  $\vec{N}$ , toujours orthogonale au support, dirigée du support vers le corps.
- la réaction **tangentielle**  $\vec{T}$ , colinéaire au support. Il s'agit d'une force de frottement qui s'oppose au glissement. S'il n'y a pas de frottement,  $T = 0$ .

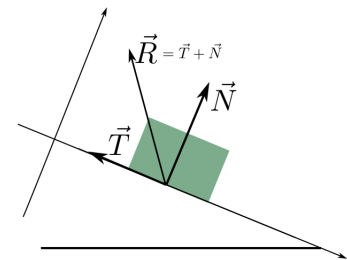


Figure 5: Réaction d'un support

Il existe des lois phénoménologiques, appelées lois d'Amontons-Coulomb, qui résument l'action de la réaction tangentielle sur le mouvement.

#### Lois d'Amontons - Coulomb

- S'il y a **adhérence** (le mobile ne glisse pas) :

$$T < f_s N$$

où  $f_s$  désigne le coefficient de frottement **statique**.

- S'il y a **glissement**, la réaction tangentielle est opposée à la vitesse de glissement, et l'on a :

$$T = f_d N$$

où  $f_d$  désigne le coefficient de frottement **dynamique**.

Le coefficient  $f_s$  dépend du type de surface, quelques valeurs sont données dans la table 4.

#### • Poussée d'Archimède

Qualitativement, lorsqu'un corps est immergé dans un fluide au repos, la pression étant plus élevée en profondeur, il en résulte une force globalement orientée vers le haut. Cette résultante est appelée poussée d'Archimède.

#### Théorème d'Archimède

Tout corps de volume immergé  $V$  plongé dans un fluide de masse volumique  $\rho_f$  au repos subit une force verticale  $\vec{\Pi}_A$  appelée **poussée d'Archimède**, dirigée de bas en haut et égale (et opposée) au poids du volume de fluide déplacé :

$$\vec{\Pi}_A = -\rho_f V \vec{g}$$

Elle s'applique au centre de masse du fluide déplacé, appelé **centre de poussée**, qui est le centre de masse du volume immergé.

Lorsque le solide flotte à l'interface entre deux fluides, il subit une poussée d'Archimède de la part de chaque fluide, correspondant à la proportion de volume immergé dans chaque fluide. À l'interface entre un liquide et un gaz, la poussée d'Archimède exercée par le gaz est presque toujours négligeable (masse volumique très inférieure).

Interfaces	$f_s$
Métal - métal	$\simeq 0,1$
Bois - bois	$\simeq 0,3$
Pneu - route	$\simeq 0,5$

Table 4: Quelques valeurs de  $f_s$

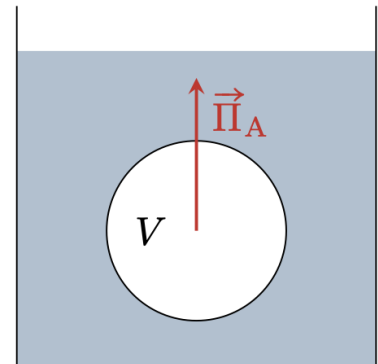


Figure 6: Poussée d'Archimède exercée sur un corps totalement immergé.

Selon la légende, le roi de Syracuse aurait demandé à Archimède (âgé alors de 22 ans) de vérifier si une couronne d'or qui lui avait été offerte, était totalement en or ou si l'artisan y avait mis de l'argent. Archimède aurait trouvé le moyen de vérifier si la couronne était vraiment en or, alors qu'il était au bain public, en observant comment des objets y flottaient. Il serait alors sorti dans la rue entièrement nu en s'écriant son célèbre « Eurêka ! »

**Application** - On considère une balle de rayon  $R = 10$  cm immergée dans l'eau. Quelle est la valeur de la poussée d'Archimède s'exerçant sur cette balle ?

- **Frottement fluide**

Lorsqu'un corps est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce sur lui une force de frottement dans la direction opposée à la vitesse de ce corps par rapport au fluide.

#### Modèle de frottements linéaires

Pour une vitesse faible, on peut adopter un modèle linéaire pour la force de frottement :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

où  $\alpha$  désigne un coefficient de frottement.

Le coefficient  $\alpha$  dépend de la taille du corps ainsi que de la viscosité du fluide.

#### Modèle de frottements quadratiques

Pour une vitesse plus élevées, on peut adopter un modèle quadratique :

$$\vec{f} = -hv \vec{v} - hv^2 \vec{e}_T$$

où  $h$  désigne un coefficient de frottement et  $\vec{e}_T$  le vecteur unitaire tangent de la base de Frenet.

Pour savoir quel type de modèle adopter, il faut étudier le *nombre de Reynolds*  $Re$  de l'écoulement (cf mécanique des fluides). Il s'agit d'un nombre sans dimension valant  $Re = \rho v L / \eta$ , où  $L$  désigne une longueur caractéristique de l'écoulement,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $\eta$  sa viscosité. Par "faible vitesse", on entend en réalité un régime d'écoulement à faible nombre de Reynolds.

**Application** - Donner les unités SI des coefficients de frottement  $\alpha$  et  $h$ .

- **Tension**

#### Tension d'un fil inextensible

Un point matériel accroché à un fil inextensible subit une force de tension, notée  $\vec{T}$ , selon la direction du fil et orientée vers le fil. Sa norme est a priori inconnue.

Lorsque l'on tire sur un fil extensible (élastique) ou un ressort celui-ci s'allonge, dans un premier temps, proportionnellement à la force appliquée : le ressort est alors qualifié de *linéaire*. On dit que le comportement est **élastique**. Ce comportement est caractéristique de la matière solide et est réversible. En revanche, lorsque la force dépasse



une valeur seuil, le comportement n'est plus réversible, et une *rupture* peut survenir.

♥ **Tension (ou force de rappel) d'un ressort**

Un ressort, caractérisé par sa longueur à vide  $l_0$  et sa raideur  $k$  produit une force appelée **force de rappel**, s'écrivant

$$\vec{F} = -k(l(t) - l_0) \vec{u}_{\text{sortant}}$$

où  $l$  désigne la longueur instantanée du ressort, et  $\vec{u}_{\text{sortant}}$  désigne le vecteur unitaire orienté du ressort vers le point d'attache considéré.

Le ressort peut donc être comprimé ( $l - l_0 \leq 0$ ) ou étiré ( $l - l_0 \geq 0$ ) : ces deux cas de figure permettent d'ailleurs de retrouver intuitivement le signe dans l'expression de la force.

**Application** - On considère deux ressorts de même raideur  $k$  et de même longueur à vide  $l_0$ . Exprimer les forces exercées par chaque ressort sur  $M_1$  et  $M_2$ , repérés par  $x_1$  et  $x_2$ .

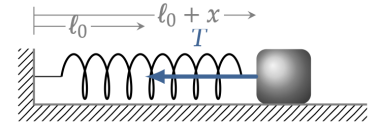
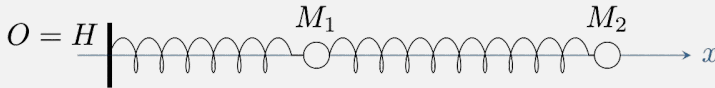


Figure 7: Force de rappel d'un ressort

### III Lois de Newton

En 1687, Newton publie ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, dans lequel il introduit trois axiomes (principes) de la théorie du mouvement.

#### III.1 Quantité de mouvement

♥ **Quantité de mouvement d'un point matériel**

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , acquiert une quantité de mouvement (ou impulsion)

$$\vec{p}(M) = m \vec{v}(M)$$

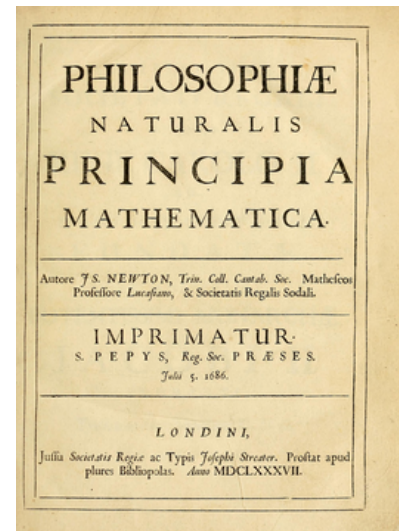


Figure 8: Couverture des *Principia*, ouvrage fondateur de la physique moderne, disponible dans son intégralité sur la site de la [Bibliothèque Nationale de France](#)

**Application** - Calculer la quantité de mouvement d'une balle de tennis en tournoi, d'un sprinteur de 100m et d'une balle de fusil tirée.

Dans le cas où le système étudié est composé d'un ensemble de points matériels, la quantité de mouvement se construit en sommant les contributions de chaque point matériel.

### ♥ Quantité de mouvement d'un système de point matériels

La quantité de mouvement d'un système  $S$  de points matériels de masse totale  $m$  est la même que celle d'un point matériel de même masse et situé au centre d'inertie  $G$  :

$$\vec{p}(S) = m \vec{v}(G)$$

**Démonstration** - La quantité de mouvement d'un système composite  $S$  constitué de points matériels  $M_i$  avec  $i \in [1, N]$ , s'écrit

$$\vec{p}_S = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(M_i) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}$$

En introduisant le **centre d'inertie**  $G$  du système comme étant le barycentre des masses :

$$m\vec{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{OM}_i$$

il vient ensuite

$$m \frac{d\vec{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}$$

En identifiant avec l'expression de  $\vec{p}_S$ , on trouve ainsi :

$$\vec{p}(S) = m \frac{d\vec{OG}}{dt} = m \vec{v}(G)$$

Si l'on place  $O$  en  $G$ , on obtient une autre définition de  $G$  :

$$\sum_i m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$$

## III.2 Première loi de Newton

Le principe d'inertie est un des piliers de la mécanique newtonienne. C'est Galilée qui en eût l'intuition et Newton qui le formalisa dans ses *Principia*, sous la forme du principe d'inertie. On en donne ici son énoncé actuel.

"J'imagine qu'un mobile a été lancé sur un plan horizontal d'où l'on a écarté tout obstacle ; il est déjà certain, d'après ce qu'on a dit ailleurs plus longuement, que son mouvement se poursuivra uniformément et éternellement sur ce même plan pourvu qu'on le prolonge à l'infini." Galilée, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*

### ♥ Première d'inertie

Il existe des référentiels particuliers appelés **référentiels galiléens** dans lesquels un point matériel isolé conserve sa quantité de mouvement. Son mouvement est alors rectiligne uniforme.

Ce principe fondamental de la mécanique **postule** et définit l'existence des référentiels galiléens. Il est à noter qu'il n'existe aucun référentiel *absolument* galiléen, mais qu'en première approximation (sur une échelle de temps relativement courte), on peut les considérer comme tels. Pour savoir si un référentiel est galiléen, il faut donc faire des expériences et voir si les lois de Newton sont vérifiées. Sauf mention contraire, la dynamique sera exclusivement étudiée dans des référentiels galiléens.

**Application** - À quelle condition le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?

### ♥ Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée. Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

**Démonstration** - Soit  $\mathcal{R}_1$  un référentiel galiléen, et soit  $M$  un point matériel isolé. Alors  $M$  est en mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}_1$ . Soit  $\mathcal{R}_2$  un référentiel.

- S'il est galiléen, alors  $M$  est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_2$ . La seule possibilité est alors que  $\mathcal{R}_2$  soit en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_1$ .
- Réciproquement, si  $\mathcal{R}_2$  est en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_1$ , alors le mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}_2$  est aussi un mouvement rectiligne uniforme. Ceci étant valable pour tout point  $M$  isolé, il en résulte que  $\mathcal{R}_2$  est bien galiléen.

Le "repos" au sens usuel en mécanique n'est qu'un cas particulier du mouvement rectiligne uniforme (vitesse nulle).

Le référentiel terrestre peut être, en très bonne approximation, considéré comme galiléen (tant que les expériences ont une durée petite devant une journée). Pour des expériences plus précises ou plus longues, il faut se placer dans le référentiel géocentrique (qui est une meilleure approximation de référentiel galiléen), voir même le référentiel de Copernic (centré sur le système solaire).

## III.3 Deuxième loi de Newton

La deuxième loi de Newton – dite aussi principe fondamental de la dynamique – postule simplement que l'action d'une force entraîne une variation de la quantité de mouvement, et ce de manière proportionnelle.

### ♥ Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  un point matériel  $M$  de masse  $m$  voit sa quantité de mouvement modifiée par l'action de forces  $\vec{F}_i$  :

$$\frac{d\vec{p}(M)}{dt} = m\vec{a}(M) = \sum_i \vec{F}_i$$

Il est essentiel que le référentiel  $\mathcal{R}$  soit galiléen : si ce n'est pas le cas, la relation de la dynamique ne s'applique pas directement, même s'il est possible de la réécrire en la modifiant.

**Application** - Montrer que la quantité de mouvement d'un système isolé est constante.

Ce théorème est aussi valable pour un système de points matériels ou pour un solide, à condition de définir la quantité de mouvement du centre d'inertie comme vue précédemment.

### Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie  $G$  d'un système  $S$  de masse  $m$  vérifie :

$$\frac{d\vec{p}(S)}{dt} = m\vec{a}(G) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

où  $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$  désigne la résultante des forces extérieures au système.

Le centre d'inertie a donc le même mouvement qu'un point matériel de masse  $m$  soumis à la résultante de forces  $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ .

## III.4 Troisième loi de Newton

Enfin, Newton ajoute un troisième principe, qui indique que la force est un *point de vue* sur l'interaction : on distingue l'opérateur du système qui subit la force. En réalité, cette interaction implique deux forces, reliées par le principe des actions réciproques.

### ♥ Troisième loi de Newton

Tout corps  $A$  exerçant une force sur un corps  $B$ , subit de la part de  $B$  une force d'intensité égale, de même droite d'action et de sens opposé.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

On voit ici que la masse  $m$  mesure l'inertie du point matériel dans le sens où plus sa masse est importante plus il sera difficile de modifier son vecteur vitesse. Par ailleurs, la mécanique newtonienne suppose l'invariance de la masse par changement de référentiel.

C'est ce principe des actions réciproques qui permet d'établir le théorème du centre d'inertie : les actions internes s'annulent deux à deux en vertu de ce principe, ce qui explique pourquoi n'apparaissent que les forces extérieures au système.

## IV Mouvements dans un champ de pesanteur uniforme

### IV.1 Chute libre

#### • Cas unidimensionnel

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  lâché sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$  (repérée sur un axe vertical ascendant), en chute libre dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$ . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit ainsi :

$$m \vec{a} = m \vec{g} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

On voit ainsi que tous les corps tombent à la même vitesse dans le vide : on parle d'**universalité de la chute libre**. Ainsi une plume et un marteau tombent à la même vitesse dans le vide : cette expérience fut réalisée sur la Lune en 1971 lors de la mission Apollo 15, par le commandant David Scott.

On obtient ainsi l'équation horaire du mouvement (en se souvenant que l'axe vertical est ascendant) :

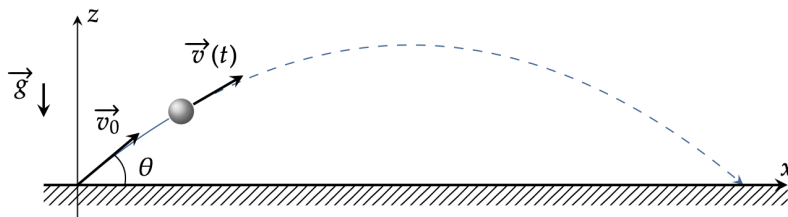
$$\dot{z}(t) = -gt \quad \text{d'où} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

Ainsi, on montre que la vitesse de chute ne dépend pas du corps considéré, puisqu'elle s'écrit :

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

#### • Cas bidimensionnel

Considérons à présent le cas où le point matériel est lâché avec une vitesse non colinéaire au champ de pesanteur, comme sur la figure 9.



La vidéo de la chute libre sur la Lune est disponible [en cliquant ici](#).

Dans le cas où le point matériel est lâché avec une vitesse initiale  $v_0$ , on a  $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

Figure 9: Chute libre à 2 dimensions

Cette fois, la projection du principe fondamental de la dynamique selon les axes  $Ox$  et  $Oz$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = C_1 = v_0 \cos(\theta) \\ \dot{z} = -gt + C_2 = -gt + v_0 \sin(\theta) \end{cases}$$

Les équations horaires s'écrivent donc (puisque  $x(0) = z(0) = 0$ ) :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos(\theta) \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin(\theta) \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire  $z(x)$  s'obtient en exprimant  $t$  en fonction de  $x$  :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$$

Ainsi,

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + x \tan \theta$$

Il s'agit de l'équation d'une **parabole**.

**Application** - Montrer que la portée  $L$  d'un tel mouvement s'écrit :

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

On rappelle que  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$

L'angle à choisir pour un lancer optimal est donc  $\theta = 45^\circ$ . La figure ci-dessous illustre l'influence de l'angle initial sur la trajectoire du point matériel.

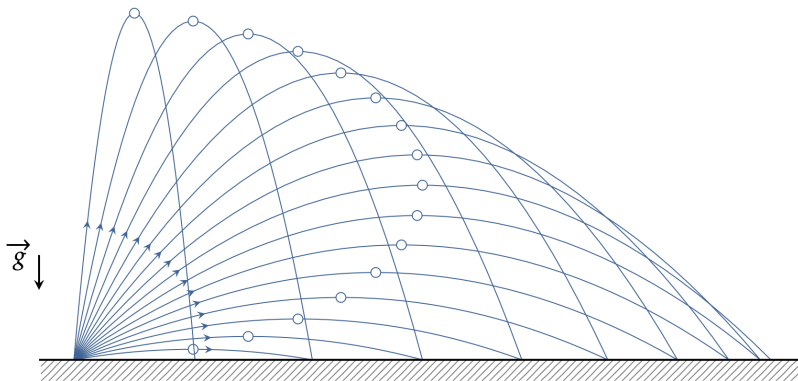


Figure 10: Influence de  $\theta$  sur la trajectoire

### IV.2 Chute avec frottements linéaires

Considérons maintenant un point matériel chutant verticalement à faible vitesse dans un champ de pesanteur uniforme, avec une vitesse initiale nulle. Dans ce cas, la force de frottement exercée par le fluide dans lequel le point matériel est en mouvement s'écrit :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

Dans ce cas, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - \alpha \vec{v}$$

Projetée selon l'axe vertical ascendant, cette équation différentielle s'écrit

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = -g$$

On identifie ainsi un temps caractéristique de chute  $\tau = \frac{m}{\alpha}$  et une vitesse limite  $v_{\text{lim}} = -g\tau$ . On réécrit alors l'équation sous forme canonique

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$$

La solution  $v(t)$  est la somme de la solution particulière  $v_{\text{lim}}$  et de la solution homogène  $A \exp(-t/\tau)$ , soit

$$v(t) = v_{\text{lim}} \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right]$$

La vitesse de chute, après un régime transitoire d'une durée d'environ  $5\tau$ , se stabilise en régime permanent vers une vitesse limite. On remarquera l'analogie avec l'étude d'un circuit RC en charge.

Ici, la vitesse limite est négative puisque la projection est faite selon l'axe ascendant, alors que la vitesse est descendante.

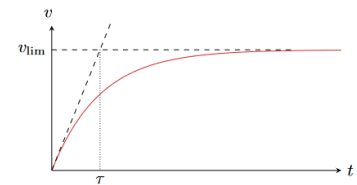


Figure 11: Vitesse d'un point matériel soumis à des frottements linéaires

### IV.3 Pendule simple

Considérons maintenant un point matériel  $M$  de masse  $m$  attachée au bout d'un fil tendu (supposé inextensible) de longueur  $L$ . On repère  $M$  à l'aide de ses coordonnées polaires  $(L, \theta)$ , où  $\theta$  est l'angle entre la verticale et le fil (cf figure 12). Le vecteur  $\vec{OM}$  s'écrit dans ce cas :

$$\vec{OM} = L \vec{u}_r$$

On obtient les vecteurs vitesse et accélération par dérivations successives :

$$\vec{v}(M) = L\dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}(M) = -L\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + L\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

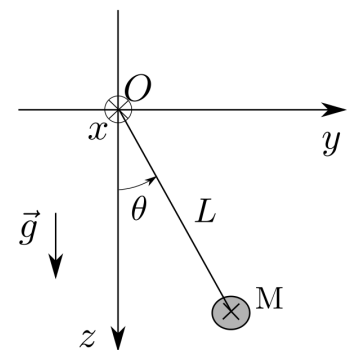


Figure 12: Pendule simple

$$m \vec{a}(M) = m \vec{g} + \vec{T}$$

où  $\vec{T}$  désigne la tension du fil. La projection selon  $\vec{u}_\theta$  s'écrit :

$$mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

soit une équation différentielle du deuxième ordre sur  $\theta$  :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

En supposant les oscillations de faible amplitude ( $\theta \ll 1$  rad), on peut approximer le sinus par son argument, ce qui permet de retrouver l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{L}}$  :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Dans le cas où l'angle  $\theta_0$  initial est trop grand pour réaliser l'approximation linéaire, on peut montrer que la période des oscillations est donnée par la **formule de Borda** :

$$T \simeq T_0 \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

La dépendance de la période avec l'amplitude des oscillations est donc cette fois quadratique. Toutefois, la formule de Borda produit une erreur supérieure à 1% dès que l'on dépasse  $74^\circ$ .

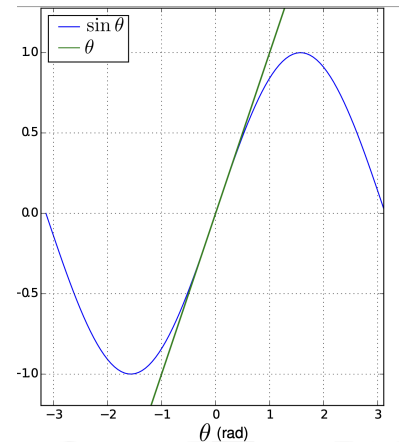


Figure 13: Approximation des petits angles : on voit que pour  $\theta$  faible, le sinus est confondu avec son argument, représenté par la droite verte. Pour  $\theta = 14^\circ$ , l'erreur liée à cette approximation est d'environ 1%.