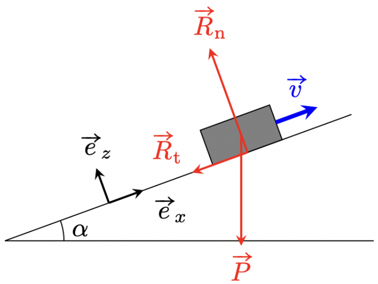
Exercice n°1 - Brique sur un plan incliné (★★)

1.(a) La brique est soumise à son poids $\overrightarrow{P} = -mg\sin\alpha\,\overrightarrow{e}_x - mg\cos\alpha\,\overrightarrow{e}_y$ et à la réaction uniquement normale $\overrightarrow{R}_n = R_n\overrightarrow{e}_y$ (pas de frottements). On applique la deuxième loi de Newton à la brique, dans le référentiel terrestre galiléen :



$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_n$$

En projetant selon l'axe (Ox), on obtient

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha$$

On intègre deux fois cette expression avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$:

$$\dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + v_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{x(t) = -\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 + v_0 t}$$

1.(b) La date d'arrêt de la brique est telle que $\dot{x}(t_a) = 0$ soit

$$\boxed{t_a = v_0/g\sin\alpha = 0,71\ \text{s}}$$

et la distance parcourue par la brique jusqu'à son arrêt est

$$\boxed{d = x(t_a) = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha} = 0,86\ \text{m}}$$

2. Dans ce cas, la deuxième loi de Newton s'écrit de la même façon, mais la projection sur l'axe Ox inclut la composante tangentielle de la réaction du support, soit $R_x = -|R_t| = -f|R_n| = -fR_y$. On obtient donc

$$-mg\sin\alpha + R_x = m\ddot{x}$$

et on aura, par ailleurs, besoin de la projection sur Oy :

$$-mg\cos\alpha + R_y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R_y = mg\cos\alpha$$

On en déduit

$$\ddot{x} = -(\sin\alpha + f\cos\alpha)g$$

puis on intègre deux fois avec les mêmes conditions initiales, pour obtenir

$$x(t) = -\frac{1}{2}(\sin\alpha + f\cos\alpha)gt^2 + v_0 t$$

La date d'arrêt est obtenue de la même façon, on a donc

$$\boxed{t'_a = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0,46\ \text{s}}$$

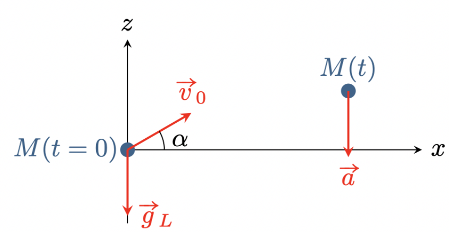
et

$$\boxed{d' = x(t'_a) = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0,55\ \text{m}}$$

Comme on pouvait le prévoir, les frottements ralentissent encore plus la brique et elle s'arrête évidemment plus tôt que dans le premier cas.

Exercice n°2 - Quel bond ! (★★)

1. On étudie le mouvement du capitaine Haddock, modélisé par un point matériel M de masse m en évolution dans le référentiel lunaire (et non terrestre !) R, supposé galiléen.



Il n'est soumis qu'à son propre poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}_L$. D'après la deuxième loi de Newton,

$$m\overrightarrow{a}_{M/R} = \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}_L \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{a}_{M/R} = \overrightarrow{g}_L$$

Le mouvement étant uniformément accéléré, il va être plan, le repérage le plus naturel pour l'étudier est un repérage cartésien dont un axe est confondu avec l'accélération et l'origine à la position initiale du capitaine Haddock. On peut alors construire le schéma figure 2, où on représente à la fois la situation initiale pour introduire les notations et une situation quelconque.
En projection, la deuxième loi de Newton donne (les constantes se déterminent à partir des conditions initiales) :

$$\begin{cases}\ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g_L\end{cases} \text{soit} \quad \begin{cases}\dot{x} = v_0\cos\alpha \\ \dot{z} = -g_L t + v_0\sin\alpha\end{cases} \text{d'où} \quad \boxed{\begin{cases}x(t) = v_0\cos\alpha t \\ z(t) = -\frac{1}{2}g_L t^2 + v_0\sin\alpha t\end{cases}}$$

2. D'après l'équation du mouvement en x,

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

En insérant ce résultat dans l'équation sur z, on trouve l'équation de la trajectoire

$$\boxed{z = -\frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$$

3. La distance L parcourue par la capitaine Haddock en sautant est telle que $z(L) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = L\left(-\frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\alpha}L + \tan\alpha\right)$$

Mathématiquement, $L = 0$ est bien solution, mais c'est bien sûr le point de départ du bond. La solution qui nous intéresse est telle que

$$-\frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\alpha}L + \tan\alpha = 0 \quad \text{soit} \quad L = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g_L}$$

On en déduit ainsi, grâce à l'identité trigonométrique $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$,

$$\boxed{L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g_L}}$$

4. La distance que parcourerait le capitaine Haddock sur Terre serait de

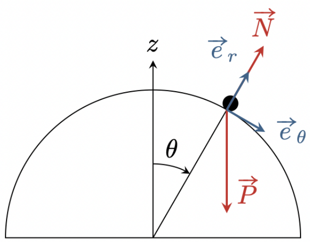
$$L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g_T}$$

Ainsi,

$$\boxed{L = \frac{g_T}{g_L}L' = 6L' = 9\text{ m}}$$

Exercice n°3 - Glissade sur un igloo (★★)

1. Le système étudié est l'enfant esquimau, en mouvement dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la réaction $\overrightarrow{R}_N$ de l'igloo, qui est sans frottement. Dans la base polaire, voir figure ci-dessous, on a



$$\overrightarrow{R}_N = R_N\overrightarrow{e_r} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P} = -mg\cos\theta\overrightarrow{e_r} + mg\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

Exprimons l'accélération de l'enfant. Comme l'igloo est sphérique, alors $r = R$ = cste.

$$\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e}_r \quad \overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta \quad \overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{e}_\theta$$

D'après le PFD, on a

$$\begin{cases}-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta\end{cases}$$

L'équation du mouvement est celle projetée sur $\overrightarrow{e}_\theta$. L'équation projetée sur $\overrightarrow{e}_r$ contient en effet une force inconnue R_N, et ne permet donc pas de déterminer le mouvement... Par contre elle permet de déterminer cette force.

2. L'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

ce qui donne en multipliant par $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Intégrons cette équation par rapport au temps :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta = C$$

Comme l'enfant s'élance de $\theta = 0$ sans vitesse ($\dot{\theta}(0) = 0$), alors $C = g/R$. On obtient finalement le résultat donné dans l'énoncé

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)}$$

> **Remarque :** La méthode pour passer d'une équation sur $\ddot{\theta}$ à une équation portant sur $\dot{\theta}^2$ est à retenir. C'est la même méthode qui permet d'établir le théorème de l'énergie cinétique (cf chapitre 12), et on retrouve des méthodes voisines pour démontrer les expressions des énergies potentielles ... et aussi celles de l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Cependant, nous verrons dans le chapitre 12 qu'il est bien plus rentable pour cette question d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique plutôt que le PFD.

3. D'après la projection radiale du PFD,

$$-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta \quad \text{donc} \quad \boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

4. L'enfant décolle de l'igloo si la force R_N de la liaison avec l'igloo s'annule, donc pour un angle θ_d tel que

$$3\cos\theta_d - 2 = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\theta_d = \arccos\frac{2}{3} \approx 48°}$$

Exercice n°4 - Oscilloscope analogique (★★)

1. On étudie le mouvement d'un électron de masse m et de charge $-e$ dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, uniquement soumis à la force électrique. Le principe fondamental de la dynamique projeté s'écrit donc :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eU}{d} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \text{soit} \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{eU}{md}t \\ \dot{z} = v_0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\begin{cases} x(t) = \frac{eU}{2md}t^2 \\ z(t) = v_0 t \end{cases}}$$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, on élimine t d'une des équations, ce qui permet d'obtenir :

$$\boxed{x = \frac{eU}{2mdv_0^2}z^2}$$

2. Comme les plaques ont pour longueur D, alors on a forcément

$$\boxed{z_K = D \quad \text{et} \quad x_K = \frac{eU}{2mdv_0^2}D^2}$$

Le plus simple pour déterminer la vitesse en sortie est de déduire l'instant $t_K = z_K/v_0 = D/v_0$ où la particule passe par K de la loi horaire et de le substituer dans la loi de vitesse, ce qui donne

$$\boxed{\dot{x}_K = \frac{eUD}{mdv_0} \quad \text{et} \quad \dot{z}_K = v_0}$$

3. En supposant la vitesse v_K suffisamment élevée pour que l'effet du poids de la particule puisse être négligé, celle-ci n'est soumise à aucune force. Son mouvement est alors **rectiligne uniforme**.

4. Comme le mouvement est rectiligne uniforme, on sait qu'à tout instant

$$\dot{x}_K = \frac{eUD}{mdv_0} \quad \text{et} \quad \dot{z}_K = v_0$$

Si on rédéfinit l'instant $t = 0$ comme l'instant auquel l'électron atteint le point K, on peut intégrer ces équations différentielles. La forme générale des solutions s'écrit donc :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{eUD}{mdv_0}t + C_1 \\ z(t) = v_0 t + C_2 \end{cases}$$

Les constantes se déterminent en utilisant les valeurs de x et z au point K :

$$x(0) = C_1 = \frac{eU}{2mdv_0^2}D^2 \quad \text{et} \quad z(0) = C_2 = D$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{eUD}{mdv_0}\left(t + \dfrac{D}{2v_0}\right) \\ z(t) = v_0 t + D \end{cases}$$

L'électron atteint l'écran à l'instant t_1 tel que $z(t_1) = L + D$ soit $t_1 = L/v_0$. On en déduit alors

$$x_I = x(t_1) = \frac{eUD}{mdv_0}\left(\frac{L}{v_0} + \frac{D}{2v_0}\right)$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{x_I = \frac{eUD}{mdv_0^2}\left(L + \frac{D}{2}\right)}$$

5. L'abscisse du point d'impact x_I sur l'écran est proportionnelle à la tension et permet donc de la visualiser directement. Pour obtenir un chronogramme sur l'écran et pas seulement un point, il faut d'une part que la fluorescence dure suffisamment longtemps, et d'autre part que la direction d'émission des électrons varie au cours du temps. Cela est assuré par deux autres plaques alimentées par une tension alternative dépendant de la base de temps qui dévient les électrons le long de la direction y.