TD Approche énergétique du mouvement - Correction

Exercice n°1 - Marsupilami

$\boxed{\textbf{1.}}$ Si l'on néglige les frottements, alors l'énergie mécanique du Marsupilami s'écrit

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe}$$

est une constante du mouvement. Son énergie potentielle compte une contribution de pesanteur E_{pp} et une contribution élastique E_{pe}. Prenons la position du sol comme référence des énergies potentielles. Lorsqu'il est au sol, queue comprimée, prêt à sauter, l'énergie mécanique du Marsupilami est uniquement de type potentielle élastique,

$$E_m = \frac{1}{2}k(l_m - l_0)^2$$

Au contraire, lorsque le Marsupilami atteint sa hauteur de saut maximale, sa vitesse est nulle et son énergie mécanique n'est plus que de type potentielle de pesanteur,

$$E_m = mgh$$

soit par conservation de l'énergie mécanique,

$$\boxed{k = \frac{2mgh}{(l_m - l_0)^2} = 4,4 \times 10^3 \text{ N/m}}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Lorsque la queue du Marsupilami quitte le sol, sa longueur est égale à sa longueur à vide. Le Marsupilami se trouve donc à une hauteur l_0 au dessus du sol avec une vitesse v. Son énergie mécanique vaut alors

$$E_m = mgl_0 + 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$mgh = mgl_0 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{v = \sqrt{2mg(h - l_0)} = 88 \text{ m/s}}$$

Exercice n°5 - Mouvement sur un cercle

Le système étudié est la bille, modélisée par un point matériel M de masse m, en évolution dans le référentiel terrestre, galiléen.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Le point M est soumis à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur, et à la réaction du support, qui ne travaille pas : puisqu'il n'y a pas de frottement, seule la composante normale est à prendre en compte. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{pp} = mgR(1 - \cos\theta)$$

en introduisant un axe vertical ascendant, dont l'origine est prise en bas du cercle.

De plus, comme le mouvement est circulaire, on connaît la vitesse de M d'où on déduit son énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2$$

L'énergie mécanique de la bille est alors une constante du mouvement, qui vaut

$$E_m = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

En dérivant par rapport au temps et en égalisant à zéro (puisque E_m est constante), on obtient l'équation du mouvement, qui se ramène à celle d'un pendule simple :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Le meilleur moyen de déterminer une force inconnue est d'écrire le principe fondamental de la dynamique,

$$m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}$$

Cette équation projetée selon $\overrightarrow{u_r}$ nous donne accès à la norme de la réaction normale :

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \quad \Longleftrightarrow \quad mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta$$

Or on a montré précédemment que

$$E_m = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mgR(1 - \cos\theta) \quad \Longleftrightarrow \quad mR\dot{\theta}^2 = \frac{2}{R}E_m + 2mg(\cos\theta - 1)$$

Ainsi, en remplaçant $mR\dot{\theta}^2$ avec la norme de N dans l'équation précédente, on obtient :

$$N = 2RE_m + mg(3\cos\theta - 2)$$

Enfin, comme l'énergie mécanique est une constante du mouvement, sa valeur à tout instant est égale à sa valeur initiale, soit $E_m = E_c(0) = \frac{1}{2}mv_0^2$. En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient le résultat attendu :

$$N = m\left[\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2)\right]$$

3. La norme N doit par définition rester positive tout au long du mouvement : si elle s'annule, c'est que le contact entre le support et la bille est rompu. Le premier terme entre crochets est toujours positif. En revanche, le second terme peut prendre des valeurs négatives. La valeur la plus petite qu'il puisse atteindre, lorsque $\cos\theta = 1$, est $5g$. Ainsi, la bille ne décolle pas du support si

$$\frac{v_0^2}{R} - 5g > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{v}_0 > v_{\min} = \sqrt{5gR}}$$

4. Supposons $v_0 < v_{\min}$, et cherchons l'angle θ pour lequel la norme de N s'annule,

$$\frac{v_0^2}{R} + g(3\cos\theta - 2) \quad \Longleftrightarrow \quad 3g\cos\theta = 2g - \frac{v_0^2}{R}$$

soit

$$\boxed{\theta = \arccos\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR}}$$

Exercice n°6 - Bille dans un tonneau

Le système est la bille dans le référentiel terrestre. On déterminer d'abord le principe fondamental de la dynamique pour déterminer la norme de la réaction normale du support. Par projection selon $\overrightarrow{u_r}$, on obtient

$$N = m(g\cos\theta + R\dot{\theta}^2)$$

Pour trouver $\dot{\theta}$ on utilise la conservation de l'énergie mécanique de la bille, qui est toujours égale à sa valeur initiale. Ainsi,

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta) = mgh$$

On en déduit

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{2gh}{R} + 2g(\cos\theta - 1)$$

En injectant dans l'expression de N, on trouve

$$N = m\left(\frac{2gh}{R} + 3g\cos\theta - 2g\right)$$

Il faut que N soit toujours positive (sinon la force s'annule ce qui est synonyme de rupture de contact). Le cas le moins favorable correspond à un angle $\theta = \pi$ (en haut du tonneau), soit

$$\frac{2gh}{R} - 3g - 2g \quad \text{donc} \quad \boxed{h > \frac{5}{2}R}$$