## Exercice n°1 - Chute d'un parachutiste

**1.** On étudie le mouvement de Luke Aikins, assimilé à un point matériel de masse $m$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On choisit un axe vertical descendant. Celui-ci est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = m g \overrightarrow{e_z}$ et à la force de frottement $\overrightarrow{f} = -k v^2 \overrightarrow{e_z}$.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}$$

soit, après projection selon $\overrightarrow{e_z}$ :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v^2 = g}$$

**2.** La vitesse limite $v_l$ est atteinte en régime permanent : auquel cas, $v_l = \text{cste}$. On en déduit

$$\boxed{v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

**3.** En inversant la relation précédente, on obtient

$$\boxed{\frac{mg}{v_l^2} = 0,35 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}}$$

**4.** L'équation différentielle précédente n'est pas linéaire à cause du terme en $v^2$. Elle n'est donc pas soluble analytiquement.

**5.** Principe de la méthode d'Euler : on transforme l'équation différentielle à résoudre en une relation de récurrence permettant de calculer $v_{n+1}$ (la vitesse à l'instant $t_{n+1}$) à partir uniquement de ce que l'on connaît, c'est-à-dire la vitesse aux instants passés : $v_n$, $v_{n-1}$, ..., et les paramètres caractéristiques du système ($k$, $m$, ...) à tout instant et les paramètres caractéristiques du système.

**6.** Par cette méthode, la dérivée s'approxime par

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t}$$

On en déduit ainsi :

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} + \frac{k}{m} v_n^2 = g \quad \text{soit} \quad \boxed{v_{n+1} = v_n + \Delta t \left( g - \frac{k}{m} v_n^2 \right)}$$

**7.** Le code est donné ci-dessous.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g = 9.8          # pesanteur, m/s**2
vl = 193/3.6     # vitesse limite, m/s
m = 100          # masse en kg
k = m*g/vl**2    # coefficient de frottement de la loi en k*v**2
v0 = 0           # vitesse initiale
dt = 0.02        # pas d'integration en secondes
fin = 20         # durée de la simulation (secondes)

liste_t = [0]
liste_z = [0]
liste_v = [v0]
t = 0
z = 0
v = v0

nb_iterations = int(fin/dt)
for i in range(nb_iterations):
    t, z, v = t + dt, z + v*dt, v + (g - k*v**2/m)*dt
    liste_t.append(t)
    liste_z.append(z)
    liste_v.append(v)

# --- Tracés ---
plt.figure(1)

plt.subplot(211)
plt.plot(liste_t, liste_z, color='r', label='distance z')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('z (m)')
plt.legend(loc='best')
plt.grid()

plt.subplot(212)
```

```python
plt.plot(liste_t, liste_v, '--', color='g', label='vitesse')
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('v (m/s)')
plt.legend(loc='best')
plt.grid()

plt.title('')
plt.show()
```

**8.** On lit sur le graphique qu'il faut 10 s pour atteindre 95% de la vitesse limite. Ceci a lieu au bout d'une hauteur de chute de 350 m environ. C'est donc assez rapide et la plus grande partie du saut a lieu à la vitesse limite.

## Exercice n°2 - Balle rebondissante

**1.** On considère la balle en chute libre, entre l'instant de son lâcher et celui de l'impact au sol. On choisit un repère cartésien, avec un axe $z$ dirigé vers le bas et tel que $z = 0$ initialement. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\ddot{z} = g \quad \text{qui s'intègre en} \quad \dot{z}(t) = gt + C_1$$

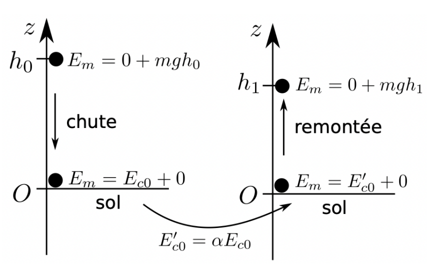
avec $C_1 = 0$ car la vitesse initiale est nulle. Finalement,

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

car $z(t = 0) = 0$. En inversant cette relation pour $z = h_0$, on obtient :

$$\boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$$

**2.** On raisonne entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = t_0$ (avant impact, à gauche sur la figure).




Le mouvement est **conservatif** car on a négligé les frottements de l'air. L'énergie mécanique de la balle est donc conservée au cours du mouvement. On en déduit :

$$E_m(t = 0) = E_m(t_0) = mgh_0 \quad \Longleftrightarrow \quad E_{c0} = E_m(t_0) = mgh_0$$

Juste après le premier impact, on a $E'_{c0} = \alpha E_{c0} = \alpha mgh_0$. On applique à nouveau le théorème de l'énergie mécanique entre l'instant juste après l'impact et l'instant où l'altitude est à nouveau maximale (à droite sur la figure) : on a cette fois :

$$mgh_1 = E'_{c0} = \alpha mgh_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{h_1 = \alpha h_0}$$

**3.** Nous venons de montrer que la hauteur atteinte après un impact est égale à $\alpha$ fois la hauteur maximale précédente. On en déduit aisément que de manière générale :

$$\boxed{h_n = \alpha^n h_0}$$

**4.** Le temps d'un aller-retour est donné par deux fois le temps mis pour chuter de l'altitude maximale $h_n$ jusqu'au sol, donc

$$T_n = 2 \times \sqrt{\frac{2h_n}{g}} = 2 \times \sqrt{\frac{2\alpha^n h_0}{g}} = 2\alpha^{n/2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

On reconnaît ici l'expression de $t_0$, telle que :

$$\boxed{T_n = 2\alpha^{n/2} t_0}$$

**5.** Pour obtenir une relation linéaire, il faut tracer $\ln(T_n)$ en fonction de $n$, puisqu'on a

$$\ln(T_n) = \frac{n}{2}\ln\alpha + \ln(2t_0)$$

On a donc une pente attendue $a = \frac{1}{2}\ln\alpha$ et une ordonnée à l'origine attendue $b = \ln(2t_0)$.

**6.** Pour obtenir $g$, on mesure la valeur de la pente attendue $b$, qui fait intervenir cette constante :

$$\boxed{g = 8h_0 e^{-2b}}$$