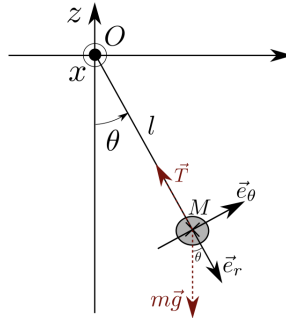


Première partie - Pendule simple

I. Mise en équation

1. Voir le schéma ci-dessous.



2. Bilan des forces s'exerçant sur le point matériel M :

- la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$.
- le poids $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$.

3. L'accélération du point M en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

4. On applique la deuxième loi de Newton au point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

En projetant selon \vec{e}_θ , on obtient :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

5. Approximation des petits angles : $\theta \ll 1$ rad : dans ce cas, $\sin\theta \simeq \theta$. L'équation se ramène alors à celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

6. Cette équation se résout en :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

D'après les conditions initiales, on trouve $A = \theta_0$ et $B = 0$. On en déduit :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$$

7. Pour $T_0 = 2$ s, on trouve $l = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = 1,0$ m.

II. Influence des frottements

8. Le coefficient α s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

9. Le bilan est le même que précédemment, en ajoutant la force de frottement de la forme $\vec{f} = \alpha l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. La projection de la deuxième loi de Newton selon \vec{e}_θ donne ainsi :

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \alpha l\dot{\theta}$$

On obtient ainsi la relation donnée dans l'énoncé :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

10. La forme canonique de l'équation est :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

On identifie ainsi $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $Q = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{l}}$.

11. Le nombre d'oscillations donne l'ordre de grandeur du facteur de qualité, soit donc ici $Q \simeq 100$.

12. Ici, le régime est pseudo-périodique ($Q > 1/2$). Les solutions s'écrivent donc :

$$\theta(t) = e^{-\mu t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

avec $\mu = -\frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Grâce aux conditions initiales, on en déduit :

$$\theta(t) = \theta_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\mu}{\Omega} \sin \Omega t \right) e^{-\mu t}$$

Deuxième partie - Microscopie

I. Microscopie optique

13. Conditions de Gauss :

- ▷ L'intersection des rayons avec le système optique se fait proche de l'axe optique.
- ▷ Les rayons sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.

14. On a :

$$\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} \quad \text{d'où} \quad \Delta = D_0 - f_1' - f_2'$$

Application numérique : $\Delta = 100$ mm.

15. On traduit les données de l'énoncé : $A \rightarrow A' = F_2$ par L_1 . Ainsi, la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{soit} \quad d = \frac{f_1'(f_1' + \Delta)}{\Delta}$$

avec $d = \overline{AO_1}$ et $\overline{O_1F_2} = f_1' + \Delta$.

Application numérique : $d = 5,25$ mm.

16. Par définition,

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1F_2}}{\overline{O_1A_1}} \quad \text{donc} \quad \gamma_1 = -\frac{f_1' + \Delta}{d} = -\frac{\Delta}{f_1'} = -20$$

L'image est donc renversée.

17. L'objet intermédiaire étant dans le plan focal objet de l'oculaire, l'image finale sera à l'infini permettant ainsi une observation sans accommodation.

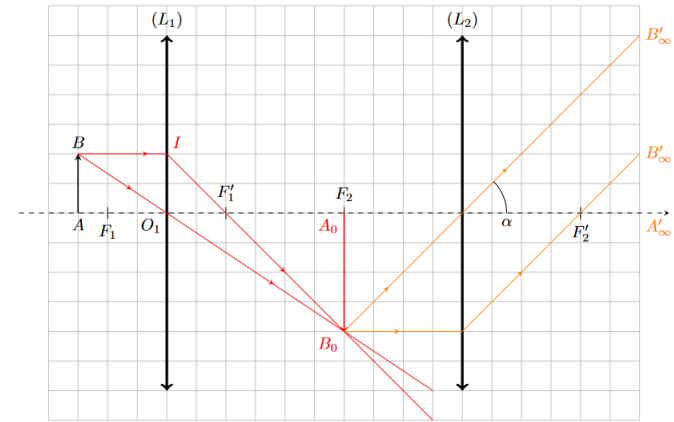


Figure 1: Tracé de la marche des rayons dans un microscope optique. Les rayons servant à construire l'image intermédiaire A_0B_0 sont représentés en rouge; les rayons servant à représenter l'image finale donnée par l'oculaire sont représentés en orange. L'image intermédiaire est bien agrandie, et l'image finale est rejetée par l'oculaire à l'infini.

18. Le tracé est donné en figure 1.

19. D'après la figure 1, on a :

$$\alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{A'B'}{f_2'} \quad \text{et} \quad \tan \alpha = \frac{AB}{d}$$

Ainsi, on en déduit :

$$G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = |\gamma_1| \frac{d}{f_2'}$$

II. Microscopie électronique

20. $[p] = \text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$, $[\lambda] = \text{L}$, $[h] = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-1}$

Ainsi, on vérifie bien que la formule est homogène.

21. Le système est conservatif. On peut ainsi écrire le théorème de l'énergie mécanique entre les deux armatures :

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

22. On trouve $v \simeq 2,0 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$: la particule est relativiste.

23. D'après la relation de De Broglie donnée, on trouve $\lambda \simeq 3,5 \times 10^{-12} \text{ m} = 3,5 \text{ pm}$.

24. On a à présent :

$$(\gamma - 1)mc^2 = eU \quad \text{soit} \quad \boxed{\gamma = \frac{eU}{mc^2} + 1}$$

De même,

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\gamma mc \sqrt{\gamma^2 - 1}}}$$

25. On trouve $\gamma = \frac{11}{9}$ et $\lambda = 3,3 \text{ pm}$.

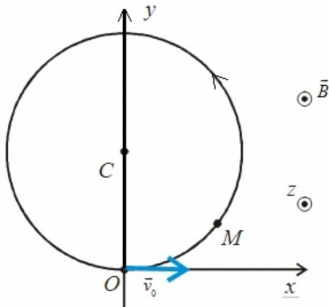
26. λ varie très peu entre les deux modèles : le modèle relativiste n'apporte donc que peu de précision supplémentaire. Par contre, l'avantage du microscope électronique réside dans l'utilisation d'électron plutôt que de photons : $\lambda_{\text{électrons}} < \lambda_{\text{photons}}$, ceci améliore donc grandement la résolution du microscope.

27. L'électron est uniquement soumis à la force magnétique de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Par application du théorème de la puissance cinétique,

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}) = 0$$

car \vec{F} est toujours orthogonale à la vitesse. Ainsi, $E_c = \text{cste}$ donc $v = \text{cste}$: **le mouvement est donc uniforme.**

28. Voir schéma ci-dessous. On utilise la règle de la main droite pour déterminer le sens de parcours.



29. Par application de la deuxième loi de Newton à l'électron, pour un mouvement circulaire uniforme (accélération centripète uniquement) :

$$-m \frac{v^2}{R} = -evB \vec{e}_r$$

En projection selon l'axe \vec{e}_r en coordonnées polaires :

$$-m \frac{v^2}{R} = -evB \quad \text{soit} \quad \boxed{R = \frac{mv}{eB}}$$

30. Dans le cas d'une particule relativiste, on remplace v par γmv :

$$\boxed{R = \frac{\gamma mv}{eB}}$$

Troisième partie - Descente en toboggan _____

31. En $z = h$, l'enfant est descendu d'une distance h selon l'axe (Oz), et il a tourné d'un angle $\theta = 2\pi$. Ainsi,

$$z(\theta = 2\pi) = h = \gamma 2\pi \quad \text{soit} \quad \boxed{\gamma = \frac{h}{2\pi}}$$

32. En coordonnées cylindriques,

$$\boxed{\vec{OM} = R\vec{u}_r + z\vec{u}_z}$$

33. Par définition,

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}$$

34. Le travail élémentaire du poids est donné par $\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{dl} = mgdz$ (axe vertical descendant. Or, par définition, $\delta W(\vec{P}) = -dE_{pp}$, où E_{pp} désigne l'énergie potentielle de pesanteur du système. Par égalisation, on en déduit :

$$\boxed{E_{pp}(z) = -mgz + C = -mgz}$$

35. La norme du vecteur vitesse est donnée par :

$$\boxed{v = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}}$$

36. L'énergie mécanique du système s'écrit ici :

$$E_m(M) = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$$

37. En réexprimant la norme de la vitesse, on obtient

$$v = \sqrt{\dot{z}^2 \left[1 + \left(\frac{R\dot{\theta}}{\dot{z}} \right)^2 \right]}$$

Or, $\dot{z} = \gamma\dot{\theta}$, on en déduit ainsi :

$$v = \dot{z} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\gamma} \right)^2}$$

Finalement, l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{R^2}{\gamma^2} \right) \dot{z}^2 - mgz = \frac{1}{2}A\dot{z}^2 - Bz$$

Par identification, on obtient :

$$A = m \left(1 + \frac{R^2}{\gamma^2} \right) \quad \text{et} \quad B = mg$$

38. Le système est soumis à son poids ainsi qu'à la réaction normale du support, qui ne travaille pas au cours du mouvement. Par application du théorème de l'énergie mécanique, **on en déduit que l'énergie mécanique se conserve.**

On applique le théorème de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'instant où l'enfant quitte le toboggan (après trois tours) :

$$E_m(z = 3h) - E_m(z = 0) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv_s^2 - 3mgh = 0$$

Ainsi,

$$v_s = \sqrt{6gh}$$

39. On applique cette fois le théorème de l'énergie mécanique sous forme instantanée :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}A\dot{z}^2 - Bz \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}A2\dot{z}\ddot{z} - B\dot{z} = 0$$

On en déduit ainsi :

$$\ddot{z} = \frac{B}{A}$$

40. En intégrant deux fois, on trouve l'équation horaire $z(t)$:

$$z(t) = \frac{B}{2A}t^2$$

Pour $t = T$, $z = 3h$: on en déduit ainsi

$$3h = \frac{B}{2A}T^2 \quad \text{soit} \quad T = \sqrt{\frac{6hA}{B}}$$

41. Si l'on prend en compte une réaction tangentielle \vec{F} du support, la puissance perdue par l'enfant au cours du mouvement s'écrit

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -Fv < 0$$

On peut alors exprimer \mathcal{P} grâce à l'expression de la norme de la vitesse v :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = F\dot{z} \sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$$

or, $\dot{z} = \frac{B}{A}t$, on en déduit ainsi :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = F \frac{B}{A} t \sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}}$$

42. L'énergie perdue E s'obtient par intégration :

$$E = \int_0^T \mathcal{P} dt = \frac{FB}{A} \sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}} \int_0^T t dt = \frac{FB}{A} \sqrt{1 + \frac{R^2}{\gamma^2}} \times \frac{T^2}{2}$$

Grâce à l'expression de T , on en déduit :

$$E = 6\pi F \sqrt{R^2 + \gamma^2}$$