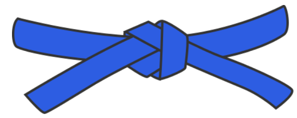
Devoir surveillé de physique n°5

Vendredi 2 Février



Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Informations

Le sujet comporte 6 pages, et comporte trois parties indépendantes :

- Première partie : Pendule simple
- Deuxième partie : Microscopie
- Troisième partie : Descente en toboggan

L'usage de calculatrices est interdit.

Avertissement

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

⋆ ⋆ ⋆

Première partie - Pendule simple

A - Pendule simple sans frottements

Galilée montre vers 1610 que les oscillations d'un pendule sont isochrones : elles ne dépendent pas de l'amplitude du mouvement. Huygens exploite ceci à partir de 1657 pour concevoir une horloge dont le mouvement est régulé par les oscillations d'un pendule : la précision s'en trouve grandement améliorée. C'est ce type d'horloge que nous étudions. On considère un pendule dont toute la masse m est localisée au point M. Le fil reliant O à M est supposé inextensible et de masse négligeable. On note l sa longueur. On négligera tout frottement. Le champ de pesanteur est $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$.

Le pendule est lâché d'un angle initial $\theta_0 \ll 1$ rad avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0 = 0$.

1. Schématiser la situation en faisant apparaître la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

2. Donner l'expression des forces s'exerçant sur la masse, en les exprimant dans la base de coordonnées polaires.

3. Exprimer et simplifier l'accélération $\overrightarrow{a}$ du système.

4. En déduire une équation du mouvement portant sur $\theta(t)$.

5. Quelle est l'hypothèse permettant de résoudre simplement cette équation ? Donner dans ce cas l'expression T_0 de la période des oscillations.

6. Résoudre l'équation dans le cadre de l'hypothèse formulée précédemment, en donnant l'expression de $\theta(t)$ en fonction de θ_0, g, l et t.

Un peu avant la Révolution française, il a été proposé de définir l'unité "un mètre" comme la longueur du fil d'un pendule pour lequel une demi-oscillation dure une seconde (la période est donc de 2 s). Ce n'est finalement pas ceci qui a été retenu, mais une définition basée sur la longueur du méridien terrestre. La définition historique avec le pendule est néanmoins celle qui a donné la définition du méridien.

7. Quelle est aujourd'hui la longueur d'un tel pendule ?

B - Influence des frottements

On reprend l'étude du pendule, mais en prenant cette fois en compte les frottements de l'air sous la forme d'une résultante s'exerçant sur la masse $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la masse. On fera l'approximation des petites oscillations, et le pendule est lâché sans vitesse d'un angle θ_0.

8. Donner l'unité SI de α.

9. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

10. Identifier alors la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du système en fonction de m, α, g et l.

11. Expérimentalement, un pendule optimisé oscille environ 100 fois avant de presque s'arrêter. Quel est l'ordre de grandeur du facteur de qualité ?

12. Déterminer l'expression de $\theta(t)$, solution de l'équation différentielle ci-dessus. On précisera l'expression des paramètres qui interviennent dans l'expression en fonction de θ_0, ω_0 et de Q.

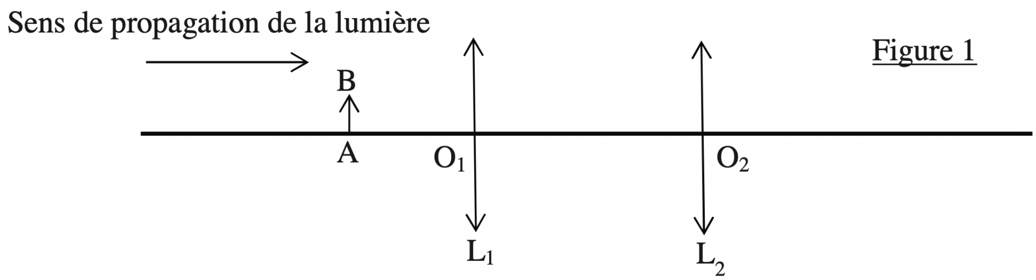
- Fin de la première partie -

Deuxième partie - Microscopie

Inspiré de Banque PT, 2017

A - Microscopie optique

Le microscope est modélisé sur la figure 1, par un système de deux lentilles minces convergentes, l'une constituant l'objectif (lentille L_1 de centre O_1 et de distance focale image $f'_1 = 5$ mm), et l'autre constituant l'oculaire (lentille L_2 de centre O_2 et de distance focale image $f'_2 = 15$ mm). On fixe $\overline{O_1O_2} = D_0 = 120$ mm. On choisit le sens positif dans le sens de propagation de la lumière.



13. Les relations précédentes sont valables à condition que les rayons lumineux satisfassent les conditions de Gauss. Donner ces 2 conditions.

14. Si F'_1 est le foyer image de L_1 et F_2 le foyer objet de L_2, on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$. Exprimer Δ en fonction de f'_1, f'_2, D_0, puis calculer sa valeur.

Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance d de L_1, à sa gauche, de façon à ce que l'image $A'B'$ donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

15. Exprimer d en fonction de f'_1 et Δ, puis calculer sa valeur.

16. Exprimer le grandissement γ_1 induit par l'objectif en fonction de f'_1 et Δ, puis calculer sa valeur.

17. Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet ?

18. Faire une construction géométrique faisant apparaître l'objet, l'image intermédiaire, ainsi que l'angle α' sous lequel est observée l'image finale à travers le microscope.

19. Le grossissement commercial du microscope est défini par

$$G = \left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right|$$

où α est l'angle sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu placé à une distance $D = 250$ mm. L'objet étant de très petite taille, ces deux angles seront bien sûr très faibles. Exprimer G en fonction de Δ, D, f'_1 et f'_2, puis calculer sa valeur.

B - Microscopie électronique

Pour améliorer la résolution des microscopes, on remplace les photons par des électrons, de charge $-e$ et de masse m. On donne la relation de De Broglie :

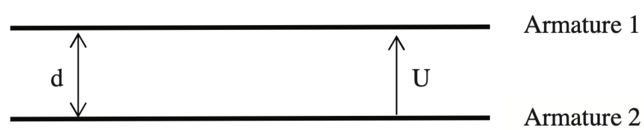
$$p = h/\lambda$$

où $p = mv$ désigne la quantité de mouvement, λ la longueur d'onde associée à la particule et h la constante de Planck en J·s.

20. Vérifier l'homogénéité de cette formule.

II.A - Aspect électrique

Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons (figure ci-dessous), constitué de deux armatures planes et parallèles, distantes de $d = 1$ cm et séparées par du vide quasi-parfait.



On donne les valeurs numériques approchées : $\dfrac{e}{m} \approx 2 \times 10^{11}$ USI et $\dfrac{h}{m} \approx 7 \times 10^{-4}$ USI.

21. On suppose que les électrons sont émis avec une vitesse initiale nulle. Exprimer la vitesse v atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent sur l'armature opposée, en fonction de U, e et m.

22. Calculer v sachant que $U = 10^5$ V. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

23. Calculer la longueur d'onde λ associée aux électrons ainsi accélérés, en picomètre.

On envisage une approche relativiste du mouvement des électrons. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit de la même façon qu'en mécanique classique, mais les expressions de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement doivent être modifiées selon les relations :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{et} \quad p = \gamma m v \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{où} \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m·s}^{-1}$$

où c désigne la célérité de la lumière dans le vide.

24. Exprimer γ en fonction de e, U, m, c puis en déduire λ en fonction de h, m_e, c et γ.

25. Calculer la valeur de γ, ainsi que la valeur approchée de λ, sachant que $\sqrt{\left(\dfrac{11}{9}\right)^2 - 1} \approx 0,7$.

26. Conclure d'une part sur le gain en précision du modèle relativiste, et d'autre part sur l'avantage du microscope électronique par rapport à un microscope optique.

II.B - Déflecteur magnétique

Le rôle d'un déflecteur magnétique est simplement de dévier le faisceau d'électrons. On suppose qu'un électron de vitesse v_0 pénètre dans une zone où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$ perpendiculaire au vecteur vitesse.

27. Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

On admet que la trajectoire de l'électron est circulaire.

28. Tracer cette trajectoire, en faisant apparaître les vecteurs $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{B}$.

29. Déterminer l'expression du rayon R de la trajectoire, en fonction de m, e, v et B.

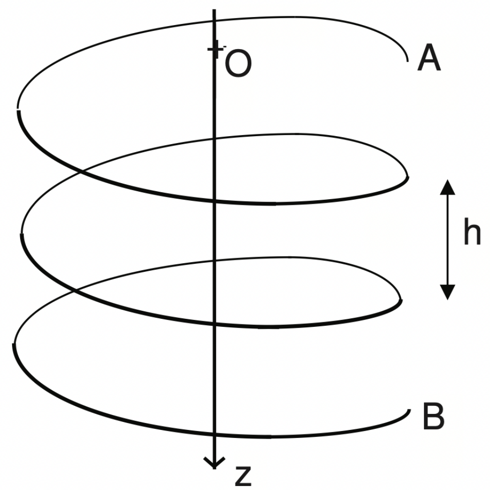
30. Que devient cette expression dans le cas d'une particule relativiste ?

- Fin de la deuxième partie -

Troisième partie - Descente en toboggan

Inspiré de Banque PT, 2022

Le toboggan est représenté sur la figure suivante.



Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :

— L'enfant de masse $m = 50$ kg, est assimilé à un point matériel M.

— Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon $R = 5$ m. On néglige tout frottement.

— A chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h.

Le point M, initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques $(r,\, \theta,\, z)$, z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi **vertical descendant**. L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.

On note $(\overrightarrow{u_r},\, \overrightarrow{u_\theta},\, \overrightarrow{u_z})$ la base locale orthonormée directe associée au système des coordonnées cylindriques.

31. Les équations de la trajectoire sont données par les relations $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma\theta$. Grâce à une valeur particulière de θ bien choisie, exprimer h en fonction de γ.

32. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M en coordonnées cylindriques.

33. Exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ du point M en fonction de R, θ, z et de leurs dérivées temporelles $\dot{\theta}$ et $\dot{z}$.

34. Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} du système, en veillant à l'orientation de l'axe vertical. Par choix des axes, la constante de l'énergie potentielle sera nulle.

35. Exprimer la norme du vecteur vitesse du point matériel M.

36. Rappeler la définition générale de l'énergie mécanique d'un point matériel M. Grâce aux deux questions précédentes, exprimer l'énergie mécanique du système considéré.

37. Montrer alors que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}A\dot{z}^2 - Bz$$

où A et B sont deux constantes à déterminer en fonction des données du problème.

38. Montrer que l'énergie mécanique se conserve. En déduire qu'à la sortie du togoggan, l'enfant a une vitesse v_s telle que

$$v_s = \sqrt{6gh}$$

39. À partir d'un théorème énergétique, déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$.

40. En déduire la durée totale T de la descente en fonction de A, B et h.

41. Si on prend en compte une force de frottement de norme constante F (réaction tangentielle), exprimer la puissance perdue par l'enfant au cours de la descente.

42. En déduire l'énergie perdue par l'enfant au cours de sa descente, en fonction de F, R et γ.

- Fin du sujet -