

DEVOIR SURVEILLÉ DE PHYSIQUE N°5

VENDREDI 2 FÉVRIER



Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Informations

Le sujet comporte 10 pages, et comporte trois parties indépendantes :

- Première partie : Ceintures de Van Allen
- Deuxième partie : Gouttes de pluie
- Troisième partie : Autour de l'appareil photographique

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

Avertissement

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * *

- Valeurs numériques :

<i>Constantes</i>	<i>Symboles</i>	<i>Valeurs</i>	<i>Unités</i>
Charge élémentaire	e	$1,6 \times 10^{-19}$	C
Masse d'un proton	m_p	$1,7 \times 10^{-27}$	kg
Masse d'un électron	m_e	$9,1 \times 10^{-31}$	kg
Electronvolt	eV	$1,6 \times 10^{-19}$	J
Masse volumique de l'air	ρ_a	1,2	kg·m ⁻³
Accélération de pesanteur	g	9,8	m·s ⁻²

- Données :

On rappelle que l'équation cartésienne d'un cercle de rayon R et de centre de coordonnées (x_c, y_c) s'écrit :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$$

Première partie - Ceintures de Van Allen

Tiré de Centrale TSI, 2005

La Terre est entourée de zones, appelées "ceintures de Van Allen", où des particules chargées, de haute énergie, sont piégées par le champ magnétique terrestre. Dans ces zones, les trajectoires des particules s'enroulent autour des lignes de champ terrestre. Au fur et à mesure que les particules se rapprochent des pôles magnétiques de la terre, les trajectoires se resserrent et la composante longitudinale de la vitesse des particules le long des lignes de champ diminue; elle peut finir même par s'annuler et les particules correspondantes repartent alors en sens inverse vers l'autre pôle où le même rebroussement se produit. Ces particules chargées oscillent ainsi entre deux points M_0 et M'_0 appelés points miroirs.

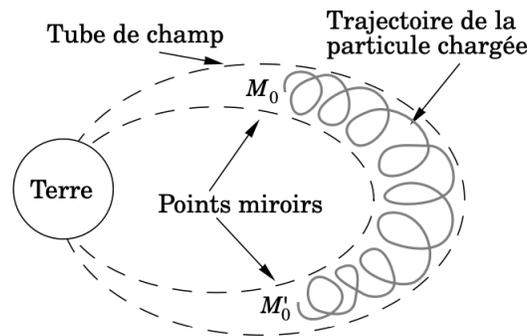


FIGURE 1 – Ceinture de Van Allen

Le problème qui suit se propose d'expliquer le mouvement de particules chargées au sein de cette ceinture. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que la force magnétique.

Une particule, de masse m et de charge q , est soumise à l'action d'un champ magnétique \vec{B} uniforme et permanent (indépendant du temps), dans le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ supposé galiléen. On appelle respectivement \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z les vecteurs unitaires des axes Ox , Oy et Oz . Le champ magnétique \vec{B} est colinéaire à Oz : $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec $B = 0,5\mu\text{T}$. On pose $\omega = -\frac{qB}{m}$.

La vitesse \vec{v} de la particule a pour composantes v_x , v_y et v_L , tel que :

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_L\vec{e}_z = \vec{v}_\perp + v_L\vec{e}_z$$

où l'on a posé $\vec{v}_\perp = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$.

Ainsi, \vec{v}_\perp et \vec{v}_L désignent les vitesses perpendiculaire et parallèle au champ \vec{B} . La norme du vecteur \vec{v}_\perp est notée v_\perp . À l'instant initial, la particule se trouve en O avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{\perp,0}\vec{e}_x + v_{L,0}\vec{e}_z$.

On suppose $v_{L,0}^2 = \frac{v_{\perp,0}^2}{10}$

1. Exprimer la force magnétique \vec{F} subie par la particule, en fonction notamment de v_x , v_y et des vecteurs unitaires.
2. Montrer que l'énergie cinétique E_c de la particule est une constante du mouvement.
3. Montrer que \vec{v}_L est une constante du mouvement.
En déduire que \vec{v}_\perp est également constant au cours du mouvement.

On étudie la projection du mouvement de la particule dans le plan \mathcal{P} perpendiculaire à \vec{B} .

4. Montrer que les composantes v_x et v_y de la vitesse de la particule obéissent aux équations différentielles :

$$\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{v}_y + \omega^2 v_y = 0$$

5. Déterminer alors l'expression de $v_x(t)$ et $v_y(t)$ en fonction de $v_{\perp,0}$, ω et du temps t .
6. En déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de la particule à l'instant t .
7. Montrer que la projection de la trajectoire de la particule dans le plan \mathcal{P} est un cercle Γ de centre C (centre guide) et de rayon a (rayon de giration).
8. Déterminer les coordonnées x_c et y_c de C , le rayon a et la période de révolution T_1 de la particule sur ce cercle en fonction de $v_{\perp,0}$ et ω .
9. Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan \mathcal{P} , dans le cas d'un proton, puis dans le cas d'un électron. Préciser en particulier les sens de parcours de chaque particule sur Γ .
10. Calculer, pour un électron d'énergie cinétique $E_c = 55$ keV le module v de sa vitesse, le rayon a et la période T_1 . Que pensez-vous de la valeur de v ? Mêmes questions pour un proton d'énergie cinétique $E_c = 0,55$ MeV.

- Fin de la première partie -

Deuxième partie - Gouttes de pluie

Tiré de CCINP filière MPI, 2023

Ce problème traite des gouttes d'eau et de l'arc-en-ciel qui résulte de l'interaction des rayons solaires avec la pluie. Il est constitué de 3 sous-parties qui peuvent être résolues de manière totalement indépendante les unes des autres. Dans tout la partie, on suppose les gouttes d'eau sphériques. L'ordre de grandeur de leur diamètre, noté D , est le millimètre.

I. Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique ρ . Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant.

11. Définir "référentiel galiléen".

12. Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau en fonction de ρ , D et g .

On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air de masse volumique ρ_a , proportionnelle au carré de la vitesse \vec{v} de la goutte. Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad C = 6,0 \times 10^{-2}$$

13. Vérifier l'homogénéité de cette formule.

14. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ , ρ_a , C et de g .

15. Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 2 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en Q5 en traits pointillés.

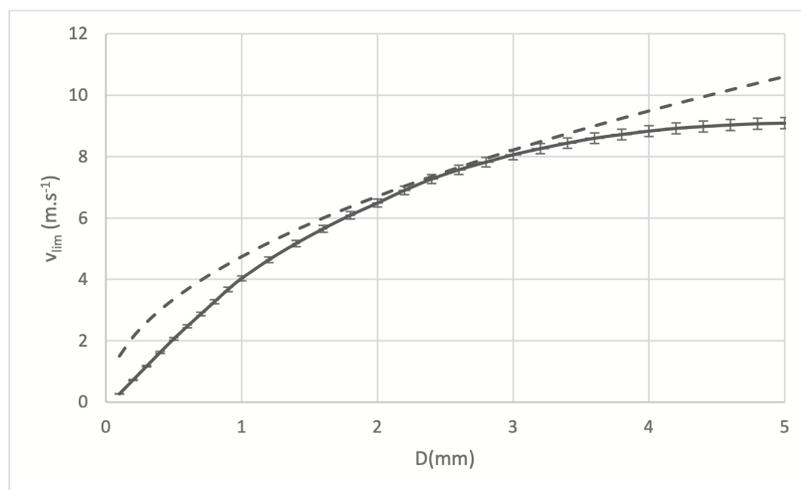


FIGURE 2 – Influence du diamètre sur la vitesse limite

16. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions précédentes n'est-il pas valide pour toutes les tailles de gouttes ?

II. Disdromètre à impact avec platine

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les événements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre ("Distribution of Drops Meter"). On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad K = 150 \text{ m}^{1/2}.\text{s}^{-1}$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact.

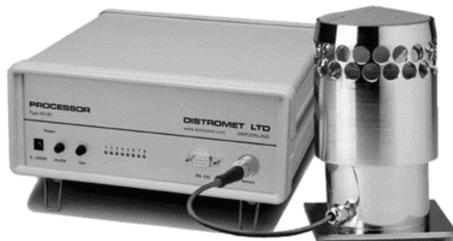


FIGURE 3 – Disdromètre Joss-Waltvogel

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M , relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti. On note k la raideur du ressort liant la platine au support, l_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\vec{f} = -\lambda\vec{v}_{\text{platine}}$. La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\vec{F}(t) = F(t)\vec{e}_z$ verticale sur celle-ci. Le référentiel lié au support est supposé galiléen. Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 4).

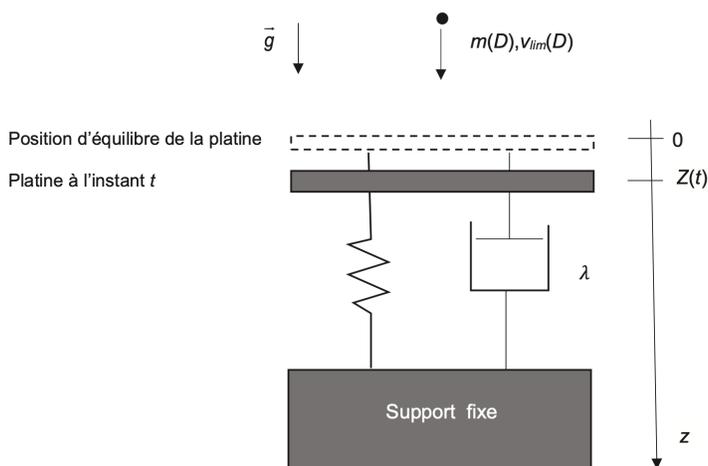


FIGURE 4 – Modélisation du disdromètre à impact de platine

17. Exprimer la longueur l_{eq} du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.
18. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dZ(t)}{dt} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k , M et de λ .

La force $F(t)$ est modélisée par :

$$\begin{cases} F = F_0 = m(D) \frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)} & \text{pour } 0 < t < \tau \\ F = 0 & \text{pour } t > \tau \end{cases}$$

19. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

20. On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0,65$ tel que :

$$\tau \approx \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

Calculer τ pour $D = 2,5\text{mm}$.

On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

21. Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ? On se place dans ce cas par la suite.

22. Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma t}{2} \right) e^{-\gamma t/2} \right]$$

23. Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = F_0/k$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α .

24. Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.

25. Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

III. Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel. Pour modéliser ce phénomène, on considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la figure 5. Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i . L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (figure 5) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

26. Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .

27. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (figure 5). Montrer que :

$$\Delta = \pi - 4r + 2i$$

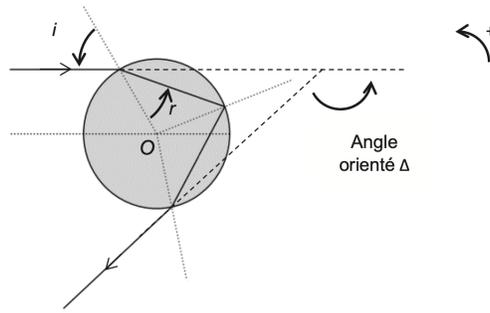


FIGURE 5 – Cas d’une réflexion et de deux réfractions

28. Exprimer l’angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$.
 29. Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

On rappelle que $\frac{d}{du} \arcsin(u) = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$.

30. Justifier à l’aide de la figure 6 qu’on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

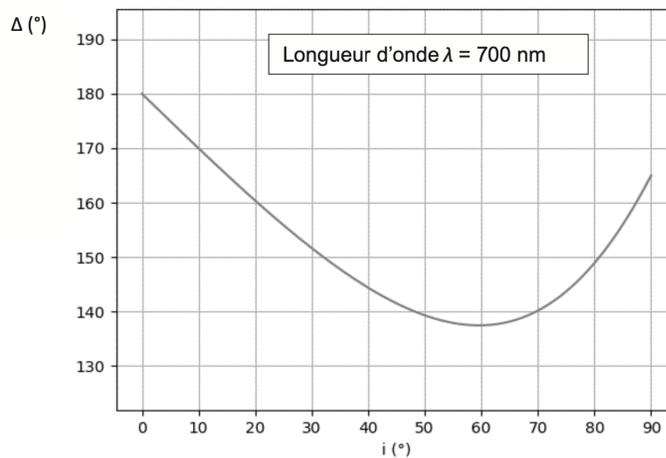


FIGURE 6 – Déviation en fonction de l’angle d’incidence

31. Calculer x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l’eau, pour le violet ($\lambda = 400$ nm, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700$ nm, $n = 1,330$).
 32. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l’œil de l’observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L’observateur observe-t-il le rouge à l’intérieur ou à l’extérieur de l’arc ?

- Fin de la deuxième partie -

Troisième partie - L'appareil photographique

Tiré de CCINP filière MP, 2021

I. Objet et image

On modélise un appareil photo (figure 7) par l'association d'une lentille mince (L) de focale $f' = \overline{OF'}$ appelée "objectif", d'un capteur (C) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme (D) placé devant la lentille.

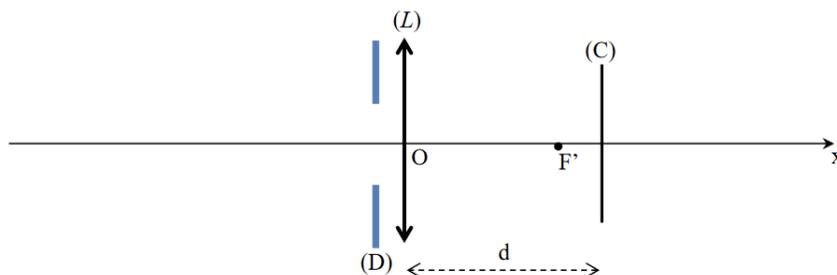


FIGURE 7 – Modélisation de l'appareil photo

La distance d entre la lentille (L) et le capteur (C) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif, elle est comprise entre d_{min} et d_{max} . À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur h situé à une distance L devant l'objectif.

33. La lentille mince est utilisée dans les conditions de Gauss.

- Préciser en quoi les conditions de Gauss consistent, et quelles conséquences elles ont pour la formation d'une image.
- Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

34. Faire un schéma soigné de la situation en notant AB l'objet et $A'B'$ son image sur le capteur (A est sur l'axe et AB appartient à un plan orthogonal à l'axe). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de B pour justifier la position de l'image $A'B'$.

35. Exprimer la taille $A'B'$ de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de h , f' et L . Calculer cette taille avec $f' = 50$ mm, $h = 5$ m et $L = 20$ m.

36. Quelle est la distance d lorsque l'objet est à l'infini ?

II. Objectifs

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour L). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale $f'_1 = 100$ mm. La distance d est toujours réglable.

37. Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ?

38. Si on suppose que le capteur a pour dimensions : 24 mm \times 36 mm, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

L'objectif utilisé est appelé "téléobjectif" ou "objectif de longue focale". Sur un site internet dédié à la photographie, on peut lire que ce genre d'objectif "rapproche les objets".

39. Commenter cette phrase en indiquant la part de vérité ou d'inexactitude qu'elle contient. Un raisonnement et un calcul numérique sont attendus (en utilisant une approximation justifiée).

On souhaite maintenant réaliser un téléobjectif en utilisant deux lentilles : une lentille (L_1) convergente et une lentille (L_2) divergente, séparées par une distance e . La distance L entre (L_1) et l'arbre n'a pas changé.

40. La lentille (L_1), de focale f'_1 , donne de l'arbre AB une image intermédiaire A_1B_1 qui joue le rôle d'objet pour la lentille (L_2), de focale f'_2 , qui en donne une image finale $A'B'$.
- Exprimer la distance $\overline{O_2A_1}$ en fonction de f'_1 et e (en utilisant une approximation justifiée).
 - L'image $A'B'$ doit être réelle. En déduire que la distance e entre les centres des deux lentilles doit être située dans une plage de valeurs bien précise. Exprimer cette condition sur e sous la forme d'une double inégalité sur e , f'_1 et f'_2 (en utilisant une approximation justifiée).
 - Vérifier que cette condition est réalisée avec $f'_1 = 10$ cm, $f'_2 = -5$ cm et $e = 8$ cm.
41. Avec les valeurs numériques de la question précédente :
- Calculer la distance d .
 - Calculer la taille de l'image $A'B'$ de l'arbre sur le capteur.
 - Indiquer si ce téléobjectif est équivalent à l'objectif de la question 5.

III. Exploitation d'une photo

Les tailles des capteurs dont sont équipés les appareils numériques actuels sont variables, comme l'indique le **document 1**.

Document 1 - Exemples de capteurs d'appareils photo numériques

Standard Diagonale	Dimensions	Exemples
1/2,5"	7,18 mm	4,29x5,76 mm Panasonic TZ6
1/2,3"	7,7 mm	4,62x6,16 mm Nikon P90, Canon 110 IS
1/2"	8 mm	4,8x6,4 mm Fuji F70EXR
1/1,7"	9,5 mm	5,7x7,6 mm Canon G10
1/1,6"	10 mm	6x8 mm Fuji S200EXR
4/3"	21,6 mm	13x17,3 mm reflex 4/3 et hybrides Micro 4/3
APS	24,8 mm à 28,4 mm	13,8x20,7 mm (Sigma) à 15,8x23,6 mm (Nikon, Sony) reflex amateurs
24x36	43,3 mm	24x36 mm Nikon D700, Sony Alpha 900

Source : *Wikipedia*

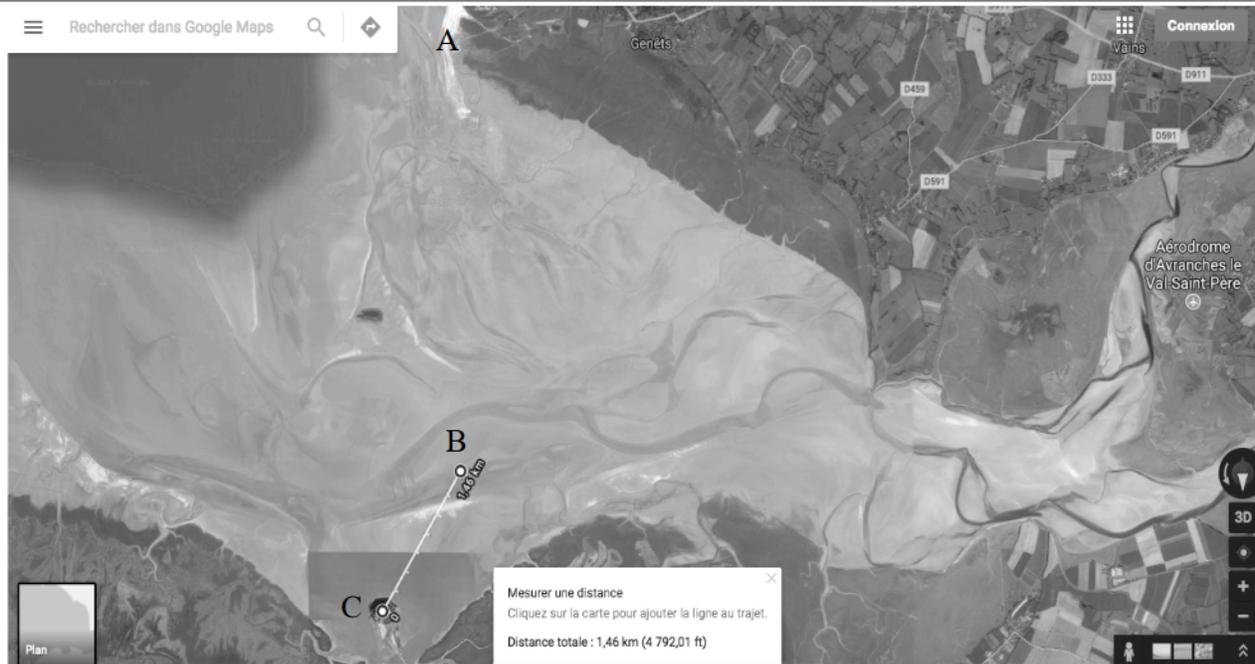
La photo ci-dessous a été prise avec un appareil photo numérique de type "Canon G10". Les informations relatives à la photo sont consignées dans le **document 2**. Il s'agit d'une photo prise dans la baie du Mont Saint-Michel (au point B sur la carte satellite du **document 3**. La distance BC vaut 1,46 km.



Document 2 - Informations relatives à la prise de vue (Photo Mont Saint-Michel)

Sensibilité : 100 ISO
Vitesse : 1/250 s
Ouverture : f/7,1
Focale : 18 mm

Document 3 - Image satellite de la baie du Mont Saint-Michel



A : Bec d'Andaine

B : lieu de la prise de vue

C : Mont Saint-Michel

42. À partir de la photo obtenue et des documents 1, 2 et 3, déterminer la hauteur du Mont Saint-Michel (flèche comprise) en indiquant les hypothèses posées, la modélisation du problème (par exemple par un schéma légendé) et les calculs effectués.

- Fin du sujet -