Chapitre 14 - Mécanique

Moment cinétique

Vincent Combette

PTSI 2023 - 2024

Différentes approches de la mécanique

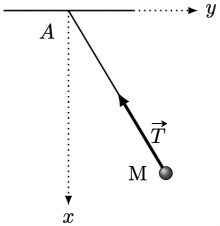


Figure: Pendule simple

Comment décrire le mouvement du pendule simple ?

- Approche newtonienne, notion de **force**

$$\text{PFD :} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

- Approche énergétique, notion d'**énergie**

$$\text{TEM :} \quad \frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$$

Analogies entre les théorèmes de mécanique

PFD : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$ TEM : $\dfrac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$

"Variation de la grandeur cinématique = Actions mécaniques"

⇝ Peut-on construire un théorème de la mécanique pour décrire efficacement les mouvements de révolution ?

Plan

1. Notion de moment cinétique
2. Moment d'une force
3. Théorème du moment cinétique

Plan

1. Notion de moment cinétique
2. Moment d’une force
3. Théorème du moment cinétique

Moment cinétique par rapport à un point

Point-clé - Moment cinétique par rapport à un point fixe ♥

Le moment cinétique d'un point mobile M par rapport à un point fixe O s'écrit :

$$\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$$

Quelques remarques :

- Il faut fixer un point de référence (le point O dans la définition).
- Le moment cinétique par rapport à un point est un vecteur.
- Comme la vitesse $\overrightarrow{v}$ dépend du référentiel, le moment cinétique également.

Propriétés du moment cinétique

- Propriétés du produit vectoriel : $\overrightarrow{L}_O \perp \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{L}_O \perp \overrightarrow{OM}$.
- Si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{0}$.
- Pour obtenir la direction de $\overrightarrow{L}_O$, on utilise la règle de la main droite

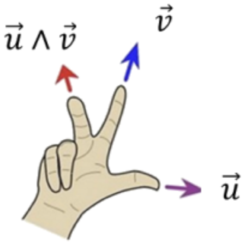
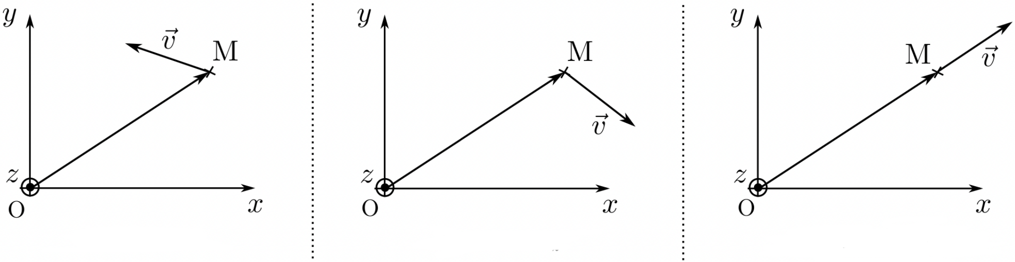


Figure: Règle de la main droite

Application n°1

Déterminer la direction d'un moment cinétique

▷ Donner la direction du moment cinétique dans les trois cas suivants.



Application n°2

Déterminer l'expression d'un moment cinétique

Un point matériel de masse m suit la trajectoire dans le plan (Oxy) telle que

$$x(t) = v_0 t \quad \text{et} \quad y(t) = y_0$$

avec $v_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

▷ Déterminer l'expression du moment cinétique du point matériel par rapport à O, l'origine du repère.

Moment cinétique par rapport à un axe fixe

Point-clé - Moment cinétique par rapport à un axe fixe ♥

Le moment cinétique d'un point mobile M par rapport à un axe fixe Δ de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$ s'écrit :

$$L_\Delta(M) = (\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$

- Le moment cinétique par rapport à un axe est un **scalaire**.

Règle du tire-bouchon

On utilise la règle du tire-bouchon pour déterminer le signe de L_Δ :

- Si M tourne autour de l'axe dans le sens direct : $L_\Delta > 0$.
- Si M tourne autour de l'axe dans le sens indirect : $L_\Delta < 0$.
- Si M se dirige exactement vers l'axe ou s'en éloigne exactement : $L_\Delta = 0$.

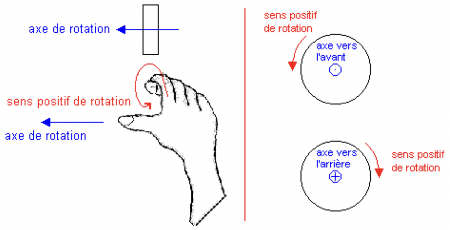
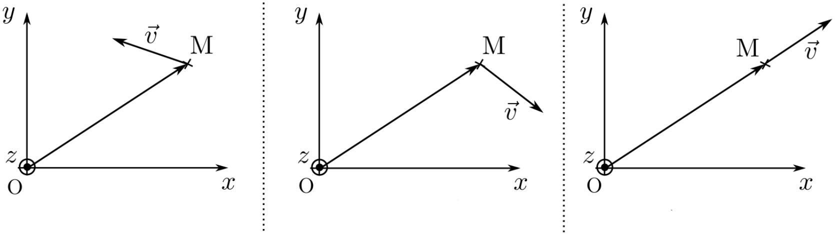


Figure: Règle du tire-bouchon

Application n°3

Utiliser la règle du tire-bouchon

▷ Donner le signe du moment cinétique par rapport à l'axe *Oz* dans les trois cas suivants.



Plan

1 Notion de moment cinétique

2 Moment d’une force

3 Théorème du moment cinétique

Définition du moment d'une force

Point-clé - Moment d'une force par rapport à un point ou un axe ♥

Soit une force $\vec{F}$ s'appliquant en un point M.

- Le moment de cette force par rapport à un point O s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

- Le moment de cette force par rapport à un axe Δ s'écrit :

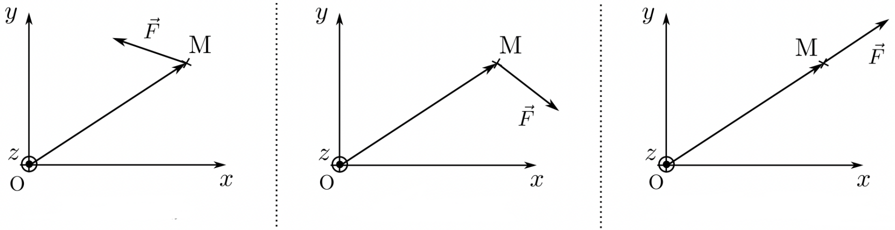
$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u_\Delta}$$

- Interprétation : le moment d'une force indique comment cette force tend à faire tourner le point où elle s'applique autour de O ou de l'axe Δ.

Propriétés du moment

Propriétés similaires à celles du moment cinétique :

- $\overrightarrow{\mathcal{M}_O} \perp$ au plan défini par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{F}$.
- Direction de $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}$ donnée par la règle de la main droite :



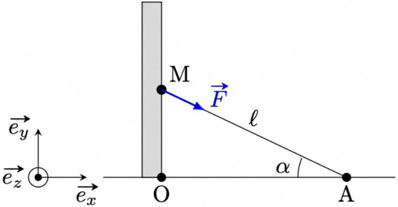
- Signe de $\mathcal{M}_\Delta$ déterminé grâce à la règle du tire-bouchon.

Application n°4

Exprimer le moment d'une force

Entraînement 13.10 — **Fil accroché au mur.**

On considère un mur auquel est accroché un filin qu'on tire depuis un point A. Il s'agit de trouver le moment de la force $\vec{F}$ par rapport aux axes (Oz) et (Az) en fonction de F, ℓ et α.



Calculer :

a) $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$ .... $\boxed{}$

b) $\mathcal{M}_{Az}(\vec{F})$ .... $\boxed{}$

Calcul d'un moment grâce au bras de levier

Au lieu de calculer le moment d'une force directement avec le produit vectoriel, on peut utiliser la méthode du bras de levier.

Méthode :

- Tracer la droite qui passe par M et qui est portée par $\vec{F}$ (droite d'action de la force).
- Tracer le projeté orthogonal de O sur la droite d'action. La distance $OH = d$ est appelée **bras de levier**.
- Le moment par rapport à l'axe est donné par

$$\boxed{\mathcal{M}(\vec{F}) = \pm \|\vec{F}\| \times d}$$

- Le signe + ou - est déterminé avec la règle du tire-bouchon.

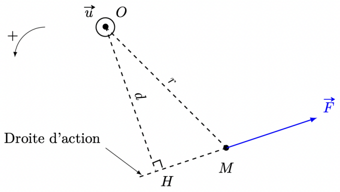


Figure: Schéma du bras de levier

Efficacité du bras de levier...

... ou comment ouvrir efficacement une porte

Le bras de levier permet de comprendre intuitivement l'efficacité avec laquelle $\overrightarrow{F}$ tend à faire tourner le point M :

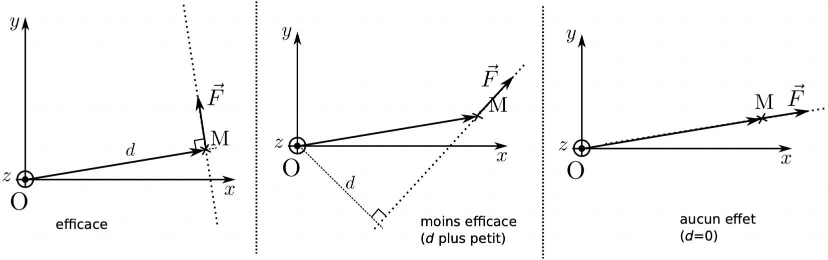


Figure: Illustration de l'efficacité du bras de levier

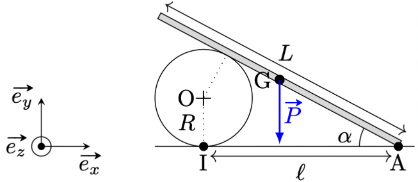
Application n°5

Déterminer le moment d'une force grâce au bras de levier

Entraînement 13.11 — **Une planche de cirque.**

On considère une planche homogène de masse m appuyée sur un cylindre.

Calculer le moment du poids de cette planche par rapport aux divers points intéressants du système.



a) $\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{P})$ ......

b) $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P})$ ......

c) $\overrightarrow{\mathcal{M}_I}(\vec{P})$ ......

Plan

1 Notion de moment cinétique

2 Moment d’une force

3 Théorème du moment cinétique

Énoncé du théorème du moment cinétique

Relier le moment cinétique aux moments des forces

Point-clé - Théorème du moment cinétique ♥

On considère dans un référentiel galiléen un point matériel M soumis à des forces $\overrightarrow{F_i}$.

- Par rapport à un point fixe O, on a :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_i})$$

- Par rapport à un axe fixe Δ, on a :

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_i})$$

Illustration

Pendule simple avec le TMC

TD

Exercice n°2 - Pendule simple relié à deux ressorts