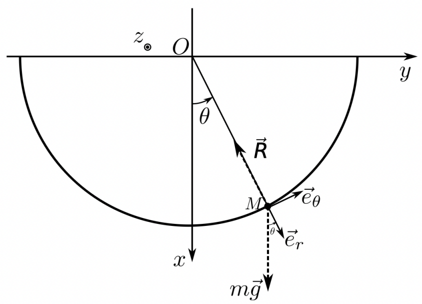
Exercice n°1 - Snowboarder dans un half-pipe (★)

1. On étudie le mouvement du snowboarder, assimilé à un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



• Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$.

• Bilan des forces :

- le poids $\overrightarrow{P}$, de moment $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{P}) = -mgR\sin\theta$ (calculé grâce au bras de levier ou grâce au calcul vectoriel explicite)
- la réaction normale de la piste $\overrightarrow{N}$, de moment nul.

D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{P})$$

soit

$$mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

2. On ne peut pas résoudre simplement cette équation, car elle est non linéaire (terme en $\sin\theta$). Pour le faire, il faut supposer les petites oscillations (ici snowboarder proche du bas du demi-cylindre). On retrouve alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$$

où l'on pose $\omega_0^2 = \dfrac{g}{R}$. Dans ce cas, les solutions s'écrivent :

$$\boxed{\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

avec A et B deux constantes d'intégration que l'on peut déterminer grâce aux conditions initiales.

Exercice n°2 - Pendule simple relié à deux ressorts (★★)

On étudie le mouvement du point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On se place dans le base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

• Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = m\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = m\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$.

• Bilan des forces :

- le poids $\overrightarrow{P}$, de moment $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{P}) = -mgR\sin\theta$ (calculé grâce au bras de levier ou grâce au calcul vectoriel explicite)
- la tension du fil, de moment nul
- la force de rappel $\overrightarrow{F_1}$ exercée par le ressort (1), qui s'écrit

$$\overrightarrow{F_1} = -k(\ell_0 + \ell\sin\theta - \ell_0)\overrightarrow{e_x} = -k\ell\sin\theta\overrightarrow{e_x}$$

  Son moment s'écrit donc

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_1}) = -k\ell^2\sin\theta\cos\theta\overrightarrow{e_z} \quad (\text{bras de levier } d = \ell\cos\theta)$$

- la force de rappel $\overrightarrow{F_2}$ exercée par le ressort (2), qui s'écrit

$$\overrightarrow{F_1} = -k(\ell_0 - \ell\sin\theta - \ell_0)(-\overrightarrow{e_x}) = -k\ell\sin\theta\overrightarrow{e_x}$$

  Son moment est donc identique au précédent : $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F_1}) = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F_2})$.

D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_2})$$

soit, par projection selon l'axe Oz

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta - 2k\ell^2\sin\theta\cos\theta$$

d'où

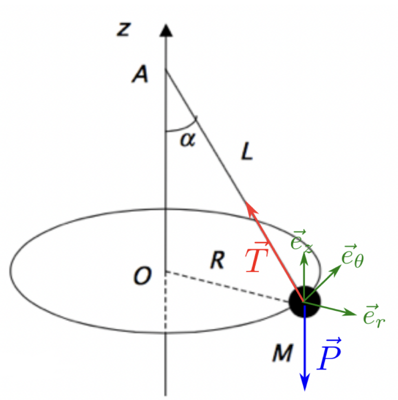
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\cos\theta\right)\sin\theta = 0$$

Dans l'approximation des petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$, ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right)}_{=\omega_0^2}\theta = 0}$$

Exercice n°3 - Pendule conique (★★★)

1. On étudie le mouvement du point matériel M attaché au fil inextensible de longueur L, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Il est judicieux de calculer les moments des forces par rapport au point A, car le moment de la force de tension du fil sera alors nul.

2. Relations utiles : $AO = L\cos\alpha$ et $R = L\sin\alpha$.

• Moment cinétique de la masse en A :

$$\overrightarrow{L_A}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = (-AO\vec{e_z} + R\vec{e_r}) \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta} = mR\omega(AO\vec{e_r} + R\vec{e_z})$$

• Bilan des forces :

- La force de tension $\vec{T}$ du fil, de moment nul
- Le poids $\vec{P}$, de moment par rapport à A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{P}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{P} = (-AO\vec{e_z} + R\vec{e_r}) \wedge (-mg\vec{e_z}) = mgL\sin\alpha\vec{e_\theta}$$

D'après le théorème du moment cinétique,

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P})$$

soit

$$\frac{d}{dt}(mR\omega(AO\vec{e_r} + R\vec{e_z})) = mgL\sin\alpha\vec{e_\theta}$$

Or, la dérivée du second terme dans la parenthèse est nulle. Il reste, en utilisant $AO = L\cos\alpha$

$$mL^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\vec{e_\theta} = mgL\sin\alpha\vec{e_\theta}$$

Par projection selon $\vec{e_\theta}$, on en déduit

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Interprétation :

- Si $\omega \to +\infty$, alors $\cos\alpha = 0$ et donc $\alpha = \pi/2$, ce qui se comprend intuitivement.
- Il n'y a aucune solution si $g/\omega^2 L > 1$ soit $\omega < \sqrt{g/L}$. Ceci signifie que si on lance le pendule avec une vitesse initiale trop faible, donc ω trop faible, alors il ne peut pas y avoir d'état stationnaire comme supposé dans l'énoncé (il y aura des oscillations du pendule).