Vrai / Faux

1. Une force centrale est un vecteur de direction constante.

Vrai ❒ Faux ❒

2. Pour un point en mouvement à force centrale, le moment cinétique (par rapport au centre de force) est constant.

Vrai ❒ Faux ❒

3. Un mouvement à force centrale est toujours plan.

Vrai ❒ Faux ❒

4. La constante des aires provient de la conservation de l'énergie mécanique d'un système soumis à une force centrale.

Vrai ❒ Faux ❒

5. La troisième loi de Kepler indique que le rapport du cube de la période sur le carré du rayon de la trajectoire d'une planète est constant.

Vrai ❒ Faux ❒

Pour bien démarrer

Exercice n°1 - Orbite géostationnaire (★)

Un satellite artificiel de masse m se déplace sur une orbite circulaire de rayon $r = R_\oplus + h$ autour du centre de la Terre avec $R_\oplus$ le rayon terrestre et h l'altitude du satellite. Son mouvement est étudié dans le référentiel géocentrique, que l'on supposera galiléen.

1. Justifier l'hypothèse selon laquelle le référentiel géocentrique est galiléen.
2. Exprimer la vitesse v du satellite en fonction de G, $M_\oplus$, $R_\oplus$ et h.
3. Exprimer la période T du mouvement. Montrer que la valeur de T^2/a^3 est la même pour tous les satellites et donner le nom de cette loi.

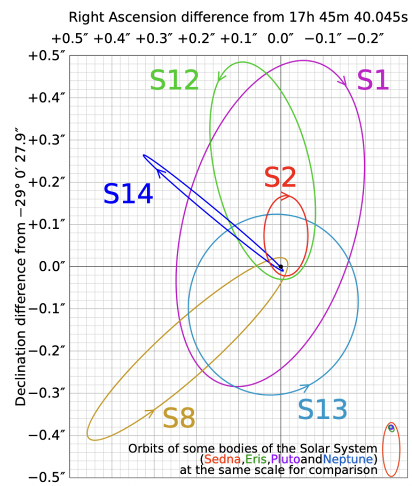
Un satellite est qualifié de géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre.

4. Donner la valeur de la période de révolution d'un satellite géostationnaire.
5. Exprimer l'altitude h de cette orbite dans le cas de la Terre.
   Réaliser l'application numérique.

Données : $G = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3·kg^{-1}·s^{-2}; $M_\oplus = 6,0 \times 10^{24}$ kg; $R_\oplus = 6370$ km.

Exercice n°2 - Trou noir supermassif (★)

Nous savons aujourd'hui que presque toutes les galaxies ont en leur centre un trou noir supermassif. C'est le cas de la voie lactée (qui est notre galaxie). Ce trou noir n'a pas été observé directement (pas encore mais bientôt, car il existe une méthode utilisant des radiotéléscopes placés à différents endroits sur Terre, qui a déjà réussi à imager le trou noir supermassif d'une galaxie voisine, cf devoir de rédaction n°3). Nous avons une preuve indirecte de son existence : le suivi de la trajectoire d'étoiles proches du centre de la galaxie montre qu'elles orbitent autour d'un centre très massif (cf image ci-dessous).



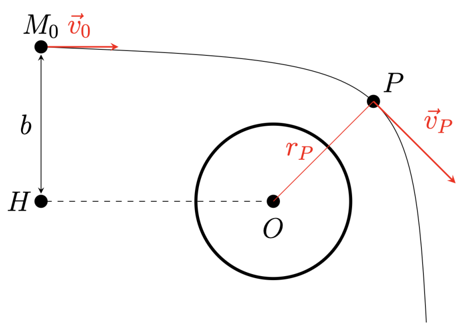
Les observations permettent de connaître les périodes et demi-grand axes de chacune. Par exemple pour l'étoile S_1 : $T = (94 \pm 9)$ années et $a = (3300 \pm 190)$ ua (1 ua $= 150 \times 10^6$ km).

▷ Estimer la masse du trou noir central de notre galaxie, en unités de masses solaires $M_\odot$. On donne $M_\odot = 2,0 \times 10^{30}$ kg.

Exercices essentiels

Exercice n°3 - Géocroiseur (★★)

Les astéroïdes dont l'orbite s'approche de celle de la Terre sont nommés géocroiseurs. Lorsqu'ils sont trop proches, ils s'échauffent par frottement dans les hautes couches de l'atmosphère et se désintègrent en donnant naissance à des étoiles filantes. S'ils sont plus proches encore, ils peuvent donner lieu à un impact avec la Terre.



On considère ici un astéroïde de masse m, initialement très éloigné de la Terre (masse M_T) et de tout autre astre, si bien qu'il est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v_0}$. Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b du centre O de la Terre, appelée paramètre d'impact. Lorsqu'il se rapproche de la Terre, l'attraction gravitationnelle dévie l'astéroïde et sa trajectoire devient hyperbolique. On appelle périgée le point P de cette trajectoire la plus proche du centre de la Terre à distance r_p. L'astéroïde a alors une vitesse v_p. L'objectif de l'exercice est de déterminer l'expression de la distance d'approche r_p en fonction de paramètres connus de l'orbite lointaine (b et v_0).

1. Justifier que l'énergie mécanique de l'astéroïde est une constante du mouvement. Traduire cette conservation entre la situation initiale et le point P, en établissant une relation entre r_p, v_p et v_0.

2. Montrer que le moment cinétique de l'astéroïde par rapport à O est également une constante du mouvement. Traduire cette conservation entre la situation initiale et le point P en établissant une seconde relation entre r_p, v_p, b et v_0.

3. En déduire l'expression de la distance minimale d'approche r_p en fonction de b et v_0.

4. Le système de surveillance de la NASA vient de détecter un astéroïde de vitesse estimée à $v_0 = 2,0$ km/s et de paramètre d'impact $b = 1,0 \times 10^5$ km. Doit-on s'inquiéter d'une collision ? Y aura-t-il des étoiles filantes ? La hauteur de l'atmosphère est d'environ 10 à 100 km.

Exercice n°4 - Gravity (★★)

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600km et 400km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_T = 6400$ km ; G désigne la constante universelle de gravitation.

1. Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2. En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de G, m, M_0 et r le rayon de l'orbite.

3. Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_H = 97$ min. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4. Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

5. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de G, M_0, m, r_H et r_S.

6. Quelle est la durée de ce voyage ?

Exercice n°5 - Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (★★)

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m, charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

1. Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.
2. Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.
3. Exprimer ainsi une relation simple entre l'énergie potentielle de l'électron et son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

4. Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.
5. En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.
6. Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

et calculer numériquement E_0, en électronvolts.

Données : constante de Planck $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s; permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1}; masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-30}$ kg; $1,0$ eV $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

Éléments de réponse

Vrai / Faux

1. Faux 2. Vrai 3. Vrai 4. Faux 5. Faux

Exercice n°1

2. PFD appliqué au satellite : $v = \sqrt{\dfrac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}}$

3. $T = \dfrac{2\pi r}{v}$ donc $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_\oplus}$: troisième loi de Kepler.

4. Le satellite géostationnaire fait un tour sur son orbite en même temps que la Terre tourne sur elle-même, donc $T = 24$ h.

5. $h = \left(\dfrac{GM_\oplus T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_\oplus = 3,6 \times 10^4$ km.

Exercice n°2

La masse du trou noir supermassif est de 4,1 millions de masses solaires.

Exercice n°3

1. Conservation de E_m : $v_0^2 = v_p^2 - \dfrac{2GM_T}{r_p}$.

2. Conservation du moment cinétique : $bv_0 = r_p v_p$.

3. On injecte le v_p précédent dans la conservation de E_m : on trouve une équation du second degré sur r_p : $\dfrac{1}{2}v_0^2 r_p^2 + GM_T r_p - \dfrac{1}{2}mb^2v_0^2 = 0$.

4. On trouve $r_p = 41 \times 10^3$ km : pas d'inquiétude, pas non plus d'étoiles filantes.

Exercice n°4

2. Énergie de l'astronaute : $E_m = -\dfrac{GmM_0}{2r}$.

3. 3$^{\text{e}}$ loi de Kepler : $T_S = 93$ min. De plus, $v_s = 7,7 \times 10^3$ m/s et $v_H = 7,6 \times 10^3$ m/s.

5. $E_m = -\dfrac{GM_0 m}{r_S + r_H}$.

6. $T_{\text{transf}} = 47$ min.

Exercice n°5

2. PFD à l'électron en coordonnées polaires : $v = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}$.
3. $E_p = 2E_m$.
4. $L_p = \sqrt{\dfrac{m e^2 r_n}{4\pi\varepsilon_0}}$.
5. Grâce à l'hypothèse de quantification, $r_n = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m e^2} n^2$.
6. $E_0 = \dfrac{m e^4}{32(\pi\varepsilon\hbar)^2} = 13,6$ eV.