# Devoir de rédaction n°3

À rendre le Mardi 5 Mars

Ce devoir issu d'annales est là pour vous familiariser avec la rédaction à adopter le jour du concours. Les résultats ainsi que la démarche à suivre vous sont données au fil des questions pour vous permettre de vous concentrer uniquement sur ce travail de rédaction.

## Modèle classique d'un trou noir

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposé dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine (la liste est sur Wikipédia), mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

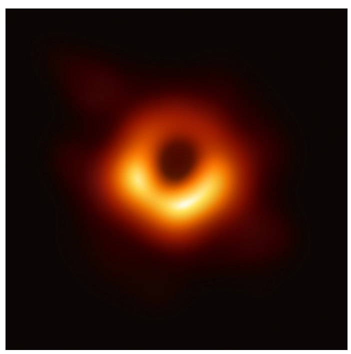

Figure 1 – Photographie du trou noir supermassif au centre de notre galaxie, prise en 2019 par le télescope Event Horizon

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle heuristique de physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel $M$ de masse $m$ à proximité d'un astre sphérique de masse $m_0$, de rayon $R$ et de centre $O$. Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que $M$ n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de $M$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

**1.** Exprimer la force gravitationnelle ressentie par $M$ ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de $M$. Celle-ci se conserve-t-elle ?

> ⇝ On veillera à utiliser les notations de l'énoncé, et l'on remarquera que force gravitationnelle est conservative.

**2.** Montrer que le mouvement de $M$ est nécessairement plan. $M$ étant alors repéré par ses coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

> ⇝ Énoncer le théorème du moment cinétique appliqué au point matériel dans le référentiel du trou noir. Montrer que le moment cinétique se conserve, en déduire les deux conséquences.

**3**. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\mathrm{p,eff}}(r)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{\mathrm{p,eff}}(r)$ dont on précisera l'expression.

> ⇝ On montrera que l'énergie potentielle effective s'écrit : $E_{p,\mathrm{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gmm_0}{r}$

**4**. Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{\mathrm{p,eff}}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de $E_m$ le point $M$ peut échapper à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.

> ⇝ Identique au raisonnement du cours sur les différents types de mouvements.

**5**. En déduire la vitesse minimale, appelée **vitesse de libération**, notée $v_{\mathrm{lib}}$, pour qu'un objet à la surface de cet astre puisse s'en échapper.

> ⇝ On exprime la conservation de l'énergie mécanique entre la surface de l'astre et une distance infinie en indiquant qu'à la limite la limite $r \to \infty$le point matériel a une vitesse nulle. On montre ainsi que $v_{\mathrm{lib}} = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}}$.

**6**. Dans la conception classique de Michell, un trou noir est un astre dont la vitesse de libération est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, $c$. Calculer le rayon de Schwarzschild $R_S$ de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

> ⇝ Montrer alors que $R_s = \frac{2Gm_0}{c^2}$.

**7**. Calculer numériquement $R_S$ pour le Soleil ($M_S = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg) et pour la Terre ($M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg). En déduire la densité minimale d'un trou de noir de cette masse. Commenter.

> ⇝ On trouve $R_{S,S} = 3,0$ km et $R_{S,T} = 9,0$ mm.

**8**. Quelles sont les deux contradictions internes à cette approche ?

> ⇝ Quelle est la limite de la mécanique classique ?

Notons toutefois que malgré les deux limites évoquées, le rayon de Schwarzschild donne le bon ordre de grandeur de la taille d'un trou noir de masse $m$.