Chapitre 16 - Mécanique

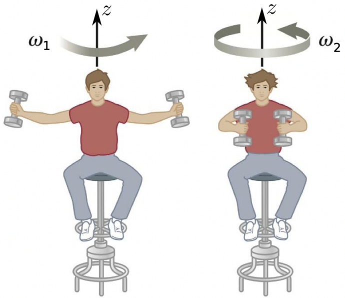
Dynamique du solide

Vincent Combette

PTSI 2023 - 2024

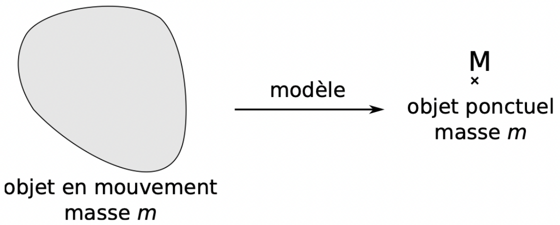
L'expérience du tabouret d'inertie

L'expérience en vidéo : **https://www.youtube.com/watch?v=G6XSK72zZJc**



Comment faire pour décrire ce mouvement ?

Jusqu'ici : modélisation des systèmes mécaniques par un point matériel.



$\rightsquigarrow$ On perd l'information sur la rotation du système.

Plan

Comment expliquer l'expérience du tabouret d'inertie ?

Plan

Plan

Système de points matériels

- **Quantité de mouvement d'un système de points**

Système $\mathcal{S}$ de points matériels M_i, de masse totale m et de centre d'inertie G :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}} = m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m\vec{v}_G \quad \text{avec} \quad m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}$$

- **Théorème de la résultante cinétique**

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{\mathcal{S}}}{dt} = m\vec{a}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}}}$$

Moment cinétique d'un système de points matériels

Le moment cinétique est **additif** : pour un système $\mathcal{S}$ constitué de points matériels M_i,

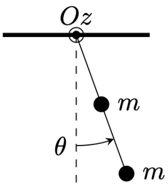
$$\vec{L}_O(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{L}_O(M_i) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i}(M_i)$$

TMC pour un système de points matériels :

$$\underbrace{\boxed{\frac{d\vec{L}_O(\mathcal{S})}{dt} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}_{\text{ext}})}}_{\text{par rapport à un point } O} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\boxed{\frac{dL_\Delta(\mathcal{S})}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})}}_{\text{par rapport à un axe } \Delta}$$

Entre le point matériel et le solide

Exercice n°1 du TD : Pendule lesté



Qu'est-ce qu'un solide ?

Point-clé - Définition d'un solide ♥

Un solide (sous-entendu : **indéformable**) est un système dont tous les points restent à distance constante les uns des autres.

Mouvements d'un solide

Mouvement de translation

Point-clé - Mouvement de translation d'un solide ♥

Un solide $\mathcal{S}$ est en mouvement de translation si, au cours du mouvement :

$$\forall A \text{ et } B \in \mathcal{S}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{cste}}$$

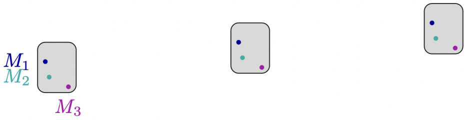
Deux types de translations :

- translation **rectiligne :** la trajectoire de chaque point est une droite
- translation **circulaire :** la trajectoire de chaque point est un arc de cercle

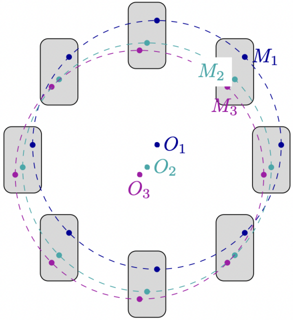
Mouvements d'un solide

Distincition translation rectiligne / circulaire

Translation rectiligne :



Translation circulaire :



Mouvements d'un solide

Mouvement de rotation

Point-clé - Mouvement de rotation d'un solide ♥

Un solide est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ si, au cours du mouvement :

$$\forall M \in \mathcal{S}, \quad \forall A \in \Delta, \quad \|\overrightarrow{AM}\| = \text{cste}$$

- La trajectoire de chacun des points M est un cercle dont le centre A est sur l'axe Δ.

Application

Distinguer translation et rotation d'un solide

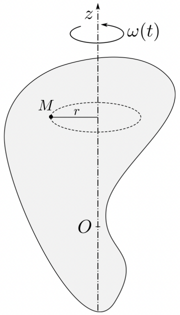
Dans chacun des cas suivants, déterminer le mouvement du solide donné :

- Mouvement d'un balai d'essuie-glace
- Mouvement d'une nacelle d'une grande roue
- Mouvement d'une personne sur une tyrolienne

Plan

Vitesse angulaire d'un solide

Coordonnées cylindriques d'axe Oz (axe de rotation).
Point M de coordonnées (r, θ, z).



Point-clé - Vitesse angulaire

On appelle **vitesse angulaire** du solide le paramètre

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

- ω ne dépend pas du point M considéré
- Vecteur cinématiques d'un point M :

$$\overrightarrow{v}(M) = r\omega\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\overrightarrow{a}(M) = -r\omega^2\overrightarrow{e_r} + R\dot{\omega}\overrightarrow{e_\theta}$$

Analogie translation / rotation

Translation	*Rotation*
z, direction du mouvement	Δ, axe de rotation
Position z	Angle θ
Vitesse $v = \dot{z}$	Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$

Application

Vitesse angulaire et vitesse d'un point d'une scie circulaire

Une scie circulaire d'un diamètre de 60 cm tourne à 640 tours par minute.

1. Calculer sa vitesse angulaire.

2. Calculer la vitesse d'une de ses dents, appelée vitesse de coupe.

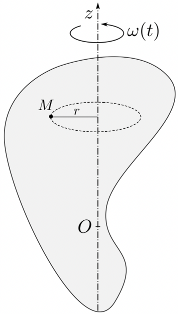
3. À quelle fréquence devrait tourner la scie pour que la vitesse de coupe soit de 30 m/s ?

Plan

Plan

Moment cinétique d'un solide en rotation

Additivité du moment cinétique : $\overrightarrow{L}_O(\mathcal{S}) = \sum_i \overrightarrow{L}_O(M_i)$



Moment d'inertie d'un solide

Point-clé - Moment d'inertie d'un solide ♥

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω s'écrit :

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \omega}$$

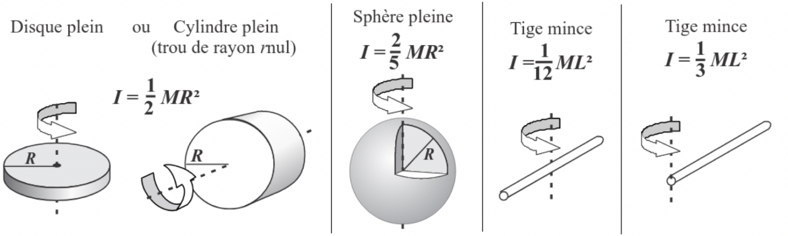
où J_Δ désigne le **moment d'inertie** du solide (en kg·m^2).

- Le moment d'inertie dépend de l'axe par rapport auquel il est défini.
- Il rend compte de la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.
- Le moment d'inertie est à la rotation ce que la masse est à la translation.

Interprétation qualitative du moment d'inertie

$J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$: plus la masse est répartie loin de l'axe, plus il est important.

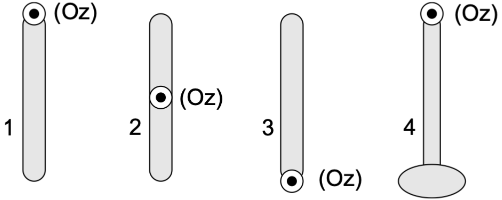
Quelques exemples de moment d'inertie pour des formes simples (pas à connaître) :



Application

Classer des moments d'inertie

Classer les moments d'inertie des solides ci-dessous, par rapport à l'axe *Oz*, par ordre croissant.



Notion d'action mécanique

- Notion de force pertinente pour un point matériel

  $\rightsquigarrow$ La force s'applique sur le point M, pas d'ambiguïté.

- Pour un solide, on parle d'**action mécanique** : l'action mécanique de la pesanteur, une action de contact (force de pression, frottements, etc).

- Pour une résultante $\vec{F}$ ayant un point d'application M :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e_\Delta}$$

  $\rightsquigarrow$ Typiquement, la pesanteur s'exerce au centre de masse M du solide.

Notion de couple

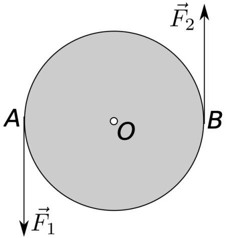
Point-clé - Notion de couple ♥

Un couple est une action mécanique dont la résultante est nulle, mais dont le moment est non nul.

- Le couple permet de mettre en rotation un objet sans le déplacer dans son ensemble.
- Le moment du couple ne dépend pas du point où il est calculé.

Notion de couple

Cas de deux forces opposées



Liaison pivot

Point-clé - Liaison pivot ♥

Une liaison pivot est un dispositif mécanique permettant la rotation d'un système autour d'un axe fixe Δ en empêchant le mouvement de translation (un seul degré de liberté : rotation d'axe Δ).

Si la liaison pivot est **parfaite**, alors $\Gamma_\Delta = 0$.

- Exemples : pédale de vélo, axe de rotation d'un tabouret, ...
- Si la liaison pivot n'est pas parfaite, il existe un couple de frottements $\Gamma_\Delta \neq 0$.

Décrire la dynamique d'un solide en rotation

Analogie translation / rotation

Translation	*Rotation*
Direction du mouvement z	Axe de rotation Δ
Position z	Angle θ
Vitesse $v = \dot{z}$	Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$
Masse m	Moment d'inertie J
Quantité de mouvement $p = m\dot{z}$	Moment cinétique $L_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$
Force F	Moment d'une action mécanique $\mathcal{M}_\Delta$

Décrire la dynamique d'un solide en rotation

Théorème scalaire du moment cinétique

Point-clé - Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation ♥

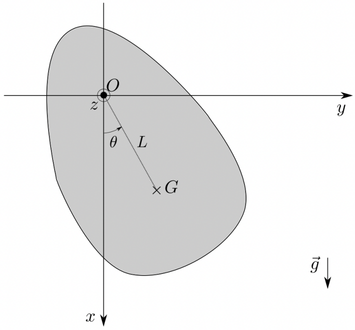
Soit un solide $\mathcal{S}$ en rotation par rapport à un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen. La dérivée temporelle du moment cinétique de $\mathcal{S}$ est donnée par :

$$\boxed{\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}}$$

- $\sum \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}$ désigne la somme des moments des actions mécaniques extérieures (résultante ou couple).

Illustration

Pendule pesant avec le TMC scalaire



Plan

Analogie translation / rotation

Translation	*Rotation*
Vitesse $v = \dot{z}$	Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$
Masse m	Moment d'inertie J

Énergie cinétique d'un solide en rotation

Point-clé - Énergie cinétique d'un solide en rotation ♥

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

Application

Comparaison de l'énergie cinétique de translation et de rotation

On considère un ballon de football, de masse $m = 500$ g et de rayon $r = 10$ cm, animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à une vitesse $v = 30$ m/s. Ce ballon est en outre animé d'un mouvement de rotation sur lui-même à la vitesse angulaire ω = 20 rad/s. Son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation vaut $\frac{2}{3}mr^2$.

▷ Exprimer et calculer le pourcentage d'énergie cinétique supplémentaire η qu'ajoute la rotation à la translation.

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation

Démonstration à l'aide du TMC

Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation

Énoncé

Point-clé - TEC pour un solide en rotation ♥

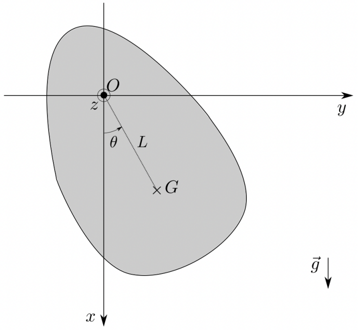
Soit $\mathcal{S}$ un solide en rotation autour d'un axe Δ dans un référentiel galiléen, à la vitesse angulaire ω. On a :

- ▷ Sous forme instantanée : $$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}J_\Delta \frac{d}{dt}\omega^2 = \sum \underbrace{\mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}} \cdot \omega}_{\mathcal{P}_\text{ext}}$$

- ▷ Sous forme intégrale : $$\Delta E_c = \frac{1}{2}J_\Delta(\omega_f^2 - \omega_i^2) = \underbrace{\sum \int_{\theta_i}^{\theta_f} \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}} \cdot d\theta}_{W_\text{ext}}$$

Illustration

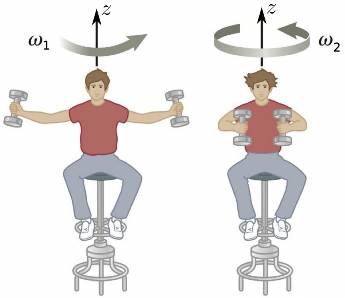
Pendule pesant à l'aide du TEC



Plan

Distinction solide / système déformable

Retour sur l'expérience du tabouret d'inertie : on assimile la personne à un **système déformable**.



Généralisation des théorèmes pour la rotation d'un système déformable

Théorème	Cas du solide	Cas du système déformable
PFD	$m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(G)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\text{actions extérieures}}$	Idem.
TMC, rotation axe fixe	$\dfrac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \Gamma_{Oz}(\vec{F}_i)}_{\text{actions extérieures}}$	Idem. (mais attention, le moment d'inertie J dépend du temps si le système se déforme)
TEC, rotation axe fixe	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)}_{\text{actions extérieures}}$	$\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)}_{\text{actions extérieures } \underline{\text{et intérieures}}}$

Épilogue - Tabouret d'inertie

Épilogue - Analogies formelles entre rotation et translation

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z Vitesse $\dot{z}$	Angle θ Vitesse angulaire $\dot{\theta}$
Masse m Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Composantes des forces $F_{i,z}$	Moment d'inertie J Moment cinétique $L_z = J\dot{\theta}$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,i}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = m\ddot{z} = \sum F_{i,z}$	Théorème du moment cinétique (scalaire) : $\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{z,i}$
Puissance d'une force $\mathcal{P} = F_z\dot{z}$ Travail $W = \int_{z_A}^{z_B} F_z \,\mathrm{d}z$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$	Puissance d'un moment $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\dot{\theta}$ Travail $W = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z \,\mathrm{d}\theta$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$
Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(F_i)$ $\leadsto$ même équation que le PFD	Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ $\leadsto$ même équation que le TMC
Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W(F_i)$	Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\frac{1}{2}J\dot{\theta}_B^2 - \frac{1}{2}J\dot{\theta}_A^2 = \sum_i W(\mathcal{M}_i)$