Vrai / Faux

1. Un solide est en mouvement de translation si tous ses points ont le même vecteur vitesse à chaque instant.

Vrai ❒ Faux ❒

2. Le moment d'inertie d'un solide est d'autant plus grand que sa masse est proche de l'axe de rotation.

Vrai ❒ Faux ❒

3. La puissance d'un couple est nulle.

Vrai ❒ Faux ❒

4. Le théorème de l'énergie cinétique pour un solide fait intervenir les forces intérieures.

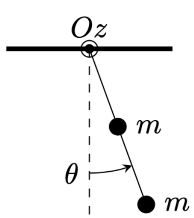
Vrai ❒ Faux ❒

5. Le théorème du moment cinétique pour un solide fait intervenir les forces intérieures.

Vrai ❒ Faux ❒

Pour bien démarrer

Exercice n°1 - Pendule lesté (★)



On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige.

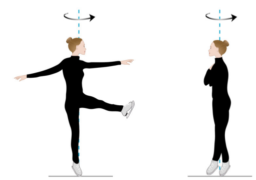
1. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5l}\sin(\theta) = 0$$

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique (ou la loi de la quantité de mouvement) à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Exercice n°2 - Patinage artistique (★)

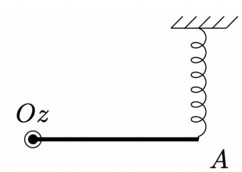


Une patineuse tourne sur elle-même avec une de ses jambes et ses bras perpendiculaire à son corps (schéma ci-dessous): sa vitesse angulaire vaut 8 rad/s et son moment d'inertie vaut 3,6 kg.m^2 . En ramenant sa jambe à la verticale et en levant ses bras au-dessus de sa tête (schéma ci-dessous), elle diminue son moment d'inertie à 1,6 kg.m^2 et sa vitesse angulaire augmente pour atteindre 18 rad/s.

▷ Évaluer le travail (en J) qu'effectue la patineuse pour rapprocher ses bras et ses jambes près d'elle.

Exercices essentiels

Exercice n°3 - Barre fixée à ses extrémités (★★)



Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre de masse m, de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz. Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $I_z = 3ma^2/4$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.

1. Dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. Donner la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k et de ℓ_0.

2. La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale. Établir l'équation du mouvement à l'aide du TMC et déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

Exercice n°4 - Chute d'un arbre (★★)

On étudie la chute d'un arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol. On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10$ m, de masse m et de moment d'inertie $J = mL^2/3$, reliée au sol par une liaison pivot parfaite, et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 0,9\pi/2$ avec l'horizontale.

1. Réaliser un schéma de la situation.
2. Justifier que l'énergie mécanique E_m est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.
3. Montrer que :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}$$

4. Exprimer alors la durée T de la chute. Réaliser l'application numérique.

Donnée : $\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} = 4,315$ pour $\theta_0 = \dfrac{0,9\pi}{2}$.

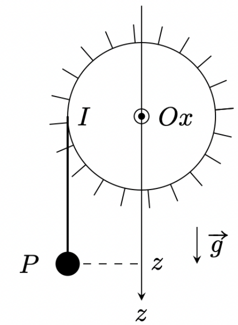
Exercice n°5 - Lancer d'une toupie (★★)

On modélise le lancer d'une toupie à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur quatre tours sur le corps de la toupie. La toupie est modélisée par un cylindre de masse m et de rayon R, de moment d'inertie par rapport à son axe $mR^2/2$. Une pointe de moment d'inertie négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal.

On suppose que pendant tout son mouvement la toupie reste verticale et ne glisse pas sur le sol. Le fil est tiré avec une force de norme F constante pour lancer la toupie. On notera ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie, et on supposera qu'à l'instant $t = 0$ où l'on commence à tirer sur le fil la toupie est immobile.

1. Exprimer la puissance instantanée de la force $\overrightarrow{F}$.
2. Appliquer le théorème de la puissance cinétique à la toupie et en déduire l'expression de l'accélération angulaire $\dot{\omega}$.
3. Déterminer la vitesse angulaire de la toupie lorsque les quatre tours de fil ont été déroulés.

Exercice n°6 - Régulateur d'Archereau-Foucault (★★)



Un régulateur d'Archereau–Foucault, schématisé ci-contre, est un dispositif ancien qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique. On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil de masse négligeable devant m. Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_x. La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre.

Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_f = -\lambda\omega$, où ω est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

1. Justifier que $\dot{z} = R\omega$.
2. Montrer que la force $\overrightarrow{T}$ de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par

$$\overrightarrow{T} = m(g - \ddot{z})\overrightarrow{u_z}$$

3. En appliquant la loi du moment cinétique au cylindre, montrer que la vitesse angulaire de rotation ω vérifie l'équation différentielle

$$(J_x + mR^2)\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = mgR$$

4. Résoudre l'équation différentielle. En déduire l'intérêt du dispositif.

Résolution de problème

▷ Retrouver, en fonction des dimensions de votre corps, l'ordre de grandeur de la vitesse de marche naturelle.

Donnée : le moment d'inertie d'une tige rectiligne, homogène, de masse m et longueur ℓ par rapport à une de ses extrémité vaut $J = m\ell^2/3$.

Éléments de réponse

Vrai / Faux

1. Vrai 2. Faux 3. Faux 4. Faux 5. Faux

Exercice n°1

3. Le TMC appliqué au point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse donne l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{3L}\sin\theta = 0$$

Il n'y a donc pas d'équivalence.

Exercice n°2

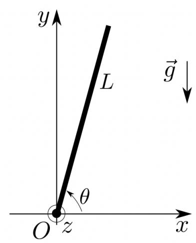
Conservation du moment cinétique : $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$.
On trouve alors $\Delta E_c = 144$ J.

Exercice n°3

1. $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{2k}$.
2. $\mathcal{M}_z(\text{poids}) \approx -mga$ et $\mathcal{M}_z(\text{ressort}) \approx mga - 4ka^2\theta$.

On en déduit $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$.

Exercice n°4

1. 

2. $E_m(t) = E_m(0) = \dfrac{mgL}{2}\sin\theta_0$.
3. En égalisant les résultats des questions précédentes, on trouve simplement la relation donnée.
4. La durée de la chute est donnée par $T = \displaystyle\int_0^T dt$ où dt est exprimé en séparant les variables avec l'équation précédente.

On trouve $T = 4,315\sqrt{\dfrac{L}{3g}} = 2,5$ s.

Exercice n°5

1. $\mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = FR\omega(t)$.
2. TPC appliqué à la toupie : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}J\omega^2(t)\right) = \mathcal{P}(\overrightarrow{F})$.

On trouve $\dot{\omega} = \dfrac{2F}{mR}$.

TEC : $\dfrac{1}{2}J\omega_f^2 = F \times 4 \times 2\pi R$ (travail sur quatre tours).

On obtient : $\omega_f = \sqrt{\dfrac{32\pi F}{mR}}$.

Exercice n°6

2. PFD appliqué à P pour obtenir la relation donnée.
3. Bras de levier : $\mathcal{M}_x(\overrightarrow{T}) = +TR$. On applique ensuite le TMC scalaire.
4. $\omega(t) = Ae^{-t/\tau} + \omega_p$ avec $\omega_p = \dfrac{mgR}{\lambda}$ et $\tau = \dfrac{J_x + mR^2}{\lambda}$.

Résolution de problème

Ne pourrait-on pas modéliser la jambe d'un marcheur à l'aide d'un pendule pesant ?