Fiche bilan n°2 **Physique**

Électronique

I - Ressources interactives

- **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémos :** cartes réalisées par Christophe Cayssiols

Cartes utilisables pour les révisions d'optique géométrique.

- **Qmax : QCM direct d'applications de cours**

Choisir d'abord le mode "j'apprends" puis éventuellement le mode "je révise". Ces QCM correspondent au programme de PCSI, certaines notions peuvent donc vous être inconnues : me demander en cas de doute.

- **Vidéos de cours, réalisées par JJ. Fleck**

Les vidéos "l'essentiel" et "démonstrations principales" sont particulièrement adaptées aux révisions. Toutefois, il s'agit du programme de PCSI : me demander si vous avez un doute sur le contenu.

II - Rappels de cours

II.A - L'approximation des régimes quasi-stationnaires

Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

L'ARQS consiste à **négliger les phénomènes de propagation du signal dans le circuit**. Dans le cas d'un circuit de longueur typique L et d'un signal de période T, cette approximation est vérifiée si :

$$\Delta t = \frac{L}{c} \ll T \quad \text{ou} \quad L \ll \lambda$$

II.B - Grandeurs électriques

- **La tension**

▷ **Symbole :** U (ou u pour des tensions variables)

▷ **Unité :** le Volt (V)

▷ **Interprétation :** la tension correspond à une différence d'état électrique, appelé **potentiel** :

$$\boxed{\mathrm{U}_{AB} = V_A - V_B}$$

▷ **Ordres de grandeur :** de quelques dizaines de mV (circuits électroniques) à plusieurs centaines de kV (lignes à haute tension). Tension du secteur $\approx$ 230 V.

- **L'intensité**

▷ **Symbole :** I (ou i pour des intensités variables)

▷ **Unité :** l'Ampère (A)

▷ **Interprétation :** l'intensité du courant électrique correspond à un débit de charges par unité de temps :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$$

▷ **Ordres de grandeur :** de quelques μA (courants synaptiques) à plusieurs kA (machines industrielles). Seuil de danger $\approx$ 10 mA.

- **La résistance**

▷ **Symbole :** R (ou parfois r, notamment pour les résistances internes)

▷ **Unité :** l'Ohm (Ω)

▷ **Interprétation :** la résistance traduit la propriété d'un milieu à s'opposer au passage du courant électrique. Elle permet de lier tension et intensité dans le cas d'un conducteur ohmique :

$$\boxed{\mathrm{U} = \mathrm{RI}}$$

▷ **Ordres de grandeur :** dans les circuits réalisés en TP, de quelques Ω à plusieurs MΩ.

- **La capacité**

▷ **Symbole :** C

▷ **Unité :** le Farad (F)

▷ **Interprétation :** la capacité d'un condensateur traduit son aptitude à accumuler des charges à ses surfaces. Elle permet ainsi de lier la charge q à la tension à ses bornes :

$$\boxed{\mathrm{q} = \mathrm{Cu}}$$

▷ **Ordres de grandeur :** dans les circuits réalisés en TP, de quelques centaines de pF à plusieurs μF.

- **L'inductance**

▷ **Symbole :** L

▷ **Unité :** le Henry (H)

▷ **Interprétation :** l'inductance d'un conducteur traduit sa capacité à subir une variation de courant due à une variation du champ magnétique. Plus cette capacité est grande, plus le conducteur est dit inductif.

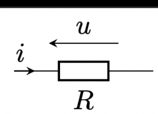
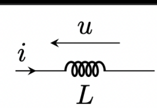
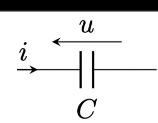
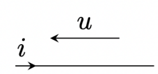
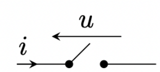
$$\boxed{u = L\frac{di}{dt}}$$

▷ **Ordres de grandeur :** dans les circuits réalisés en TP, de quelques mH à plusieurs H.

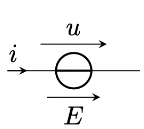
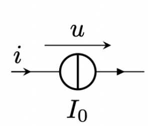
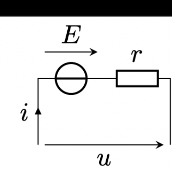
II.C - Dipôles électriques

• Dipôles passifs

Il est à noter que les lois de comportement données ci-dessous sont uniquement valables en **convention récepteur**. En convention générateur, il faut ajouter un signe moins.

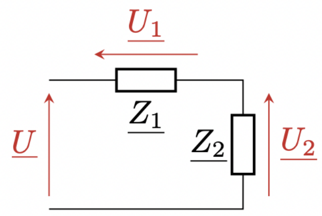
	Résistance	**Bobine**	**Condensateur**	**Fil ou interrupteur fermé**	**Interrupteur ouvert**
Symbole					
Loi de comportement	$u = Ri$	$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$u = 0$, i qcq	$i = 0$, u qcq
Impédance Admittance	$\underline{Z_R} = R$ $\underline{Y_R} = \frac{1}{R}$	$\underline{Z_L} = \mathrm{j}L\omega$ $\underline{Y_L} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}$	$\underline{Z_C} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$ $\underline{Y_C} = \mathrm{j}C\omega$	0 ∞	∞ 0
Équivalent basse fréquence Équivalent haute fréquence		Fil Interrupteur ouvert	Interrupteur ouvert Fil		
Énergie stockée	Aucune	$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}Cu^2$	Aucune	Aucune
Grandeur continue	Aucune	i	u	Aucune	Aucune

• Source de courant et source de tension

	Source idéale de tension	**Source idéale de courant**	**Générateur réel**
Symbole			 modèle de Thévenin
Loi de comportement	$u = E$, i qcq	$i = I_0$, u qcq	$u = E - ri$

II.D - Lois de l'électrocinétique dans l'ARQS

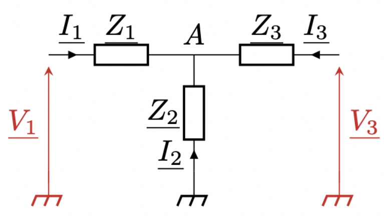
• Loi des mailles



Loi des mailles : $\underline{U_1} = \underline{U_2} + \underline{U_3}$

Pont diviseur de tension : $\underline{U_2} = \dfrac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{U}$

• Loi des noeuds



Loi des noeuds : $\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = 0$

Loi des noeuds en terme de potentiel : $\dfrac{\underline{V_1} - \underline{V_A}}{\underline{Z_1}} + \dfrac{0 - \underline{V_A}}{\underline{Z_2}} + \dfrac{\underline{V_3} - \underline{V_A}}{\underline{Z_3}} = 0$

• Association de dipôles

▷ Association **série** : on somme les **impédances**.

$$\underline{Z_{\text{éq}}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$$

▷ Association **parallèle** : on somme les **admittances**.

$$\underline{Y_{\text{éq}}} = \underline{Y_1} + \underline{Y_2}$$

• Calculs en régime sinusoïdal forcé

On associe au signal réel $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ un signal complexe $\underline{x} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$.

▷ **L'amplitude** du signal est donnée par le module de l'amplitude complexe :

$$X_m = |\underline{X_m}|$$

▷ La **phase** du signal est donnée par l'**argument** de l'amplitude complexe :

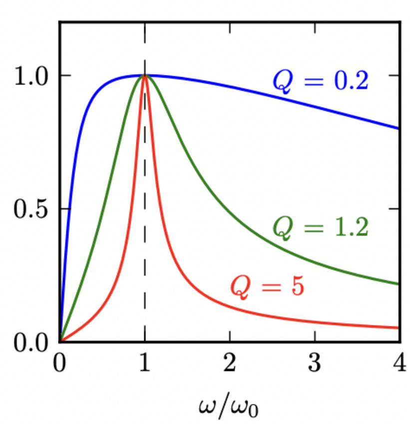
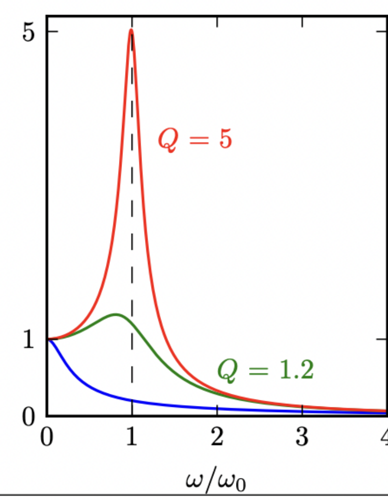
$$\varphi = \arg(\underline{X_m})$$

▷ Dérivée temporelle = multiplication par $j\omega$:

$$\frac{d}{dt} \Leftrightarrow j\omega$$

II.E - Phénomènes de résonance

Rappelons qu'il existe **deux** types de résonance différents. Seules les trois premières lignes de ce tableau sont vraiment à savoir. Les informations indiquées dans les lignes suivantes, rappelées à titre indicatif, seront à retrouver dans un exercice le cas échéant.

Exemple électronique Exemple mécanique	Résonance en intensité i Résonance en vitesse	Résonance en tension u_C Résonance en élongation
Existence	Toujours	uniquement si $Q > 1/\sqrt{2}$
Pulsation de résonance Largeur de la résonance	ω_0 $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$	$\omega_{\text{res}} \lesssim \omega_0$ $\Delta\omega \simeq \dfrac{\omega_0}{Q}$
Aspects notables à $\omega = \omega_{\text{res}}$ Aspects notables à $\omega = \omega_0$	Maximum d'amplitude, Forçage et réponse en phase C'est la résonance !	Maximum d'amplitude, Aucune relation de phase Forçage et réponse en quadrature, Rapport des amplitudes égal à Q
Mesure de ω_0 Mesure de Q	Pulsation de résonance Largeur de la résonance	Quadrature de phase Rapport des amplitudes à ω_0 ou largeur de la résonance
Courbe de gain (échelle linéaire)		

III - Quelques méthodes

III.A - Différentes équation différentielles

• Équation différentielle du premier ordre

▷ Forme canonique : $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{\tau} y = \text{cste}}$ avec τ la **constante de temps** du système.

▷ Solution homogène : $y_H(t) = Ae^{-t/\tau}$.

▷ Régit l'évolution de : circuit RL et RC, vitesse d'un point matériel soumis à une force de frottement linéaire du type $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$.

• Équation différentielle d'un oscillateur harmonique

▷ Forme canonique : $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \text{cste}}$ avec ω_0 la **pulsation propre** du système.

▷ Solution homogène : $y_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

▷ Régit l'évolution de : circuit LC, système masse-ressort idéal, mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable.

• Équation différentielle d'un oscillateur amorti

▷ Forme canonique : $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \text{cste}}$ avec Q le **facteur de qualité** du système.

▷ Solution homogène : dépend de la valeur de Q. On note r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique.

⇝ Cas où $Q < 1/2$ (régime **apériodique**) : $y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

⇝ Cas où $Q > 1/2$ (régime **pseudo-périodique**) : $y_H(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$ avec Ω la **pseudo-période** ($\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$).

⇝ Cas où $Q = 1/2$ (régime **apériodique critique**) : $y_H(t) = (A + Bt)e^{rt}$ (r désigne la racine double).

▷ Régit l'évolution de : circuit RLC, système masse-ressort avec frottements.

III.B - Résolution d'une équation différentielle par la méthode complexe

1. Remplacer les grandeurs réelles $x(t)$ par leurs représentations complexes associées $\underline{x}(t)$ dans l'E.D.

2. Remplacer les dérivées premières par $j\omega\underline{x}$ et les dérivées secondes par $-\omega^2\underline{x}$.

3. Simplifier l'équation par $e^{j\omega t}$.

4. Factoriser d'un côté de l'équation par l'amplitude complexe $\underline{X}_m$ du signal d'intérêt.

5. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{X}_m$ en fonction des autres paramètres.

6. Déterminer l'amplitude réelle $X_m = |\underline{X}_m|$ et la phase $\phi = \arg(\underline{X}_m)$.

III.C - Établir une fonction de transfert

1. Identifier des associations de dipôles afin de se ramener à un pont diviseur de tension simple.

2. On somme les impédances pour les dipôles en série, et les admittances pour les dipôles en parallèle.

On évite de mettre les fractions sous le même dénominateur pour simplifier les calculs.

3. Soit $\underline{Z_{\text{éq}}}$ l'impédance du dipôle sur lequel on mesure la tension de sortie et $\underline{Z_0}$ l'autre impédance du circuit. Pour établir la fonction de transfert :

▷ dans le cas où le dipôle équivalent est issu d'une association **parallèle**, on privilégiera l'expression :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \underline{Z_0} \times \underline{Y_{\text{éq}}}}$$

▷ dans le cas où le dipôle équivalent est issu d'une association **série**, on privilégiera l'expression :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_{\text{éq}}}}{\underline{Z_{\text{éq}}} + \underline{Z_0}}$$

4. On identifie avec la forme canonique de la fonction de transfert donnée dans l'énoncé.

IV - Démonstrations essentielles

• Circuits linéaires du 1er ordre

1. Circuit RC : établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RC à une maille. On utilisera la condition initiale $u_c(0) = E$.

2. Circuit RL : établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité traversant une bobine dans un circuit RL à une maille. On utilisera la condition initiale $i(0) = i_0$.

• Oscillateur harmonique

3. Circuit LC : établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur dans un circuit LC à une maille. On utilisera les conditions initiales $u_c(0) = E$ et $i(0) = 0$.

• Circuits linéaires du deuxième ordre

4. Circuit RLC série : établir l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur. Donner sans démonstration les trois types d'évolution en fonction de la valeur de Q.

5. Circuit RLC série : montrer qu'il existe une résonance en tension aux bornes du condensateur ssi $Q > 1/\sqrt{2}$.

• Filtrage linéaire

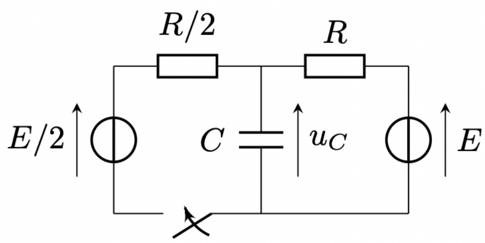
6. Filtre RC : établir la fonction de transfert du filtre RC. Exprimer alors son gain en décibels, sa phase, et les représenter sur un diagramme de Bode.

7. Filtre RL : établir la fonction de transfert du filtre RL. Exprimer alors son gain en décibels, sa phase, et les représenter sur un diagramme de Bode.

8. Filtre RLC : établir la fonction de transfert du filtre RLC. Exprimer alors son gain en décibels, sa phase, et les représenter sur un diagramme de Bode.

V - Les exercices essentiels

Exercice n°1 : Condensateur alimenté par deux générateurs *(Oral CC-INP)*



Dans le montage ci-contre, l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

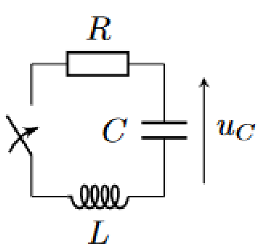
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par u_c.

2. Résoudre cette équation.

3. Déterminer le temps t_1 nécessaire pour que la valeur finale soit atteinte à 1% près.

4. Exprimer la puissance dissipée. Interpréter sa valeur finale.

Exercice n°2 : RLC série en régime libre *(Oral CC-INP)*

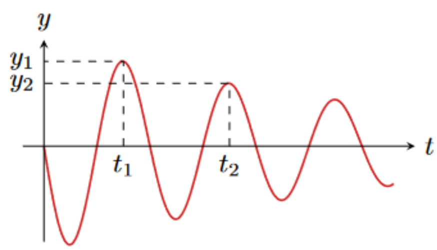


On étudie le circuit ci-contre où le condensateur est initialement chargé : $u_c(t = 0^-) = U_0$.

1. Déterminer les valeurs de i, de u_c et de u_L à la fermeture du circuit en $t = 0^+$, puis en régime permanent pour (pour $t = \infty$).

2. Parmi ces grandeurs, laquelle correspond à y représentée ci-dessous ?

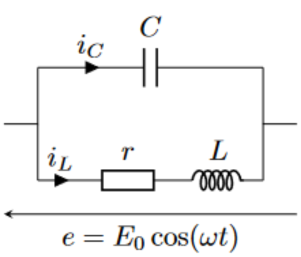
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant i en fonction de $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \dfrac{R}{2L\omega_0}$.



4. On suppose $m < 1$. Déterminer la solution en fonction de $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$. Que représente Ω ? Comment peut-on l'évaluer à partir de la courbe ?

5. En utilisant des approximations adéquates, trouver une relation simple entre le rapport y_1/y_2 et m.

Exercice n°3 : Circuit bouchon



Considérons un dipôle constitué d'une bobine (inductance L et résistance interne r) montée en dérivation avec un condensateur (capacité C). Il est alimenté par la tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω variable.

1. Exprimer l'impédance complexe Z_s d'un dipôle où r, L et C seraient montés en série, d'abord en fonction des composants puis de la résistance r, de la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et du facteur de qualité $Q = L\omega_0/r$.

2. Exprimer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle parallèle sous la forme

$$\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0}\right)$$

3. Montrer que lorsque le facteur de qualité est très élevé ($Q \gg 1$) et la pulsation ω pas trop faible ($\omega \gg \omega_0/Q$), l'impédance $\underline{Z}$ peut se mettre sous forme approchée

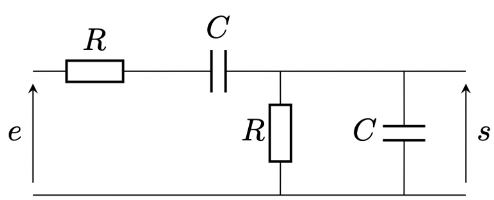
$$\underline{Z} \approx \frac{Q^2 r^2}{\underline{Z}_s}$$

On se place dans ces hypothèses pour toute la suite de l'exercice.

4. Montrer que $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $\omega = \omega_0$. Quel est alors le comportement du circuit ? Justifier sa dénomination de *circuit bouchon*.

5. On se place à $\omega = \omega_0$. Déterminer en fonction de E_0, Q et r les intensités réelles $i_C(t)$ et $i_L(t)$ qui traversent respectivement le condensateur et la bobine. Commenter les résultats obtenus.

Exercice n°4 : Filtre de Wien *(Oral banque PT)*



On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-contre.

1. Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

3. On pose $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$. Écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

en précisant ce que valent H_0 et Q.

4. Calculer simplement le gain maximal du filtre, exprimer sa valeur en dB, et calculer le déphasage correspondant.

5. Représenter le diagramme de Bode asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

6. Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1,0$ kΩ et $C = 500$ nF. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

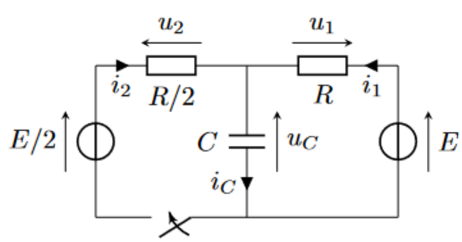
$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t)$$

avec $E_0 = 10$ V et $\omega = 200$ rad.s^{-1}.

VI - Correction des exercices

Condensateur alimenté par deux générateurs *(Oral CC-INP)*

1. Raisonnons avec les notations du schéma suivant.



- ▷ Loi des noeuds : $i_c = i_1 + i_2$
- ▷ Lois de comportement : $C\dfrac{du_c}{dt} = \dfrac{2u_1}{R} + \dfrac{u_2}{R}$
- ▷ Loi des mailles : $C\dfrac{du_c}{dt} = 2\dfrac{E/2 - u_c}{R} + \dfrac{E - u_c}{R}$

Soit

$$C\frac{du_c}{dt} = \frac{2E}{R} - \frac{3}{R}u_c$$

On en déduit ainsi :

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{3}{RC}u_c = \frac{2E}{RC} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC}{3}}$$

2. **Forme générale des solutions :**

- ▷ Solution particulière $u_{c,p} = \dfrac{2}{3}E$
- ▷ Solution homogène $u_{c,h}(t) = A\exp -\dfrac{t}{\tau}$

Condition initiale : À l'instant t = 0^-, le régime est permanent continu et le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. D'après la loi des nœuds,

$$i_1(0^-) + i_2(0^-) = i_c(0^-) \quad \text{soit} \quad i_1(0^-) = 0$$

La loi des mailles donne ensuite :

$$E = u_c(0^-) + Ri_1(0^-) \quad \text{soit} \quad u_c(0^-) = E$$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on en déduit $u_c(0^-) = u_c(0^+) = E$

Détermination de la constante A : $u_c(0^+) = A + \dfrac{2}{3}E$ d'où $A = \dfrac{E}{3}$. On peut alors écrire la solution totale :

$$\boxed{u_c(t) = \frac{E}{3}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{2}{3}E}$$

3. La tension u_c est décroissante. Ainsi, la valeur finale est atteinte à 1% près à l'instant t_1 tel que :

$$u_c(t_1) = 1,01 \text{ x } \frac{2}{3}E = \frac{E}{3}\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) + \frac{2}{3}E$$

On en déduit ainsi :

$$\boxed{t_1 = -\tau\ln(0,02)}$$

4. L'énergie dissipée l'est par effet Joule dans les résistances. La puissance dissipée dans la résistance R vaut :

$$P_1 = \frac{u_1^2}{R} = \frac{(E-u_c)^2}{R} = \frac{E^2}{9R}\left(\exp(-\frac{t}{\tau}) - 1\right)^2$$

De même, la puissance dissipée dans la résistance R/2 vaut :

$$P_2 = \frac{u_2^2}{\frac{R}{2}} = 2\frac{(\frac{E}{2} - u_c)^2}{R} = 2\frac{E^2}{9R}\left(\exp(-\frac{t}{\tau}) - \frac{1}{2}\right)^2$$

La puissance totale dissipée est donc la somme de ces deux termes :

$$P = P_1 + P_2 = \frac{E^2}{9R}\left(\exp(-\frac{t}{\tau}) - 1\right)^2 + 2\frac{E^2}{9R}\left(\exp(-\frac{t}{\tau}) - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\boxed{P = \frac{E^2}{9R}\left[3\exp(-\frac{2t}{\tau}) - 4\exp(-\frac{t}{\tau}) + \frac{3}{2}\right]}$$

Lorsque $t \longrightarrow \infty$, la puissance dissipée P tend vers :

$$\boxed{P_\infty = \frac{E^2}{6R}}$$

Cette valeur correspond à la puissance dissipée par une résistance 3R/2 alimentée par une tension $E/2$. Cette valeur est logique : en régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, si bien que les autres dipôles apparaissent montés en série. Les deux générateurs s'associent alors en un seul de force électromotrice $E/2$ (attention au sens) et les deux résistances sont équivalentes à $3R/2$.

RLC série en régime libre *(Oral CC-INP)*

1. Conditions initiales :

$$\boxed{\mathrm{i}(0^-) = i(0^+) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{u}_c(0^-) = u_c(0^+) = U_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{u}_L(0^+) = -U_0}$$

En régime permanent :

$$\boxed{\mathrm{i}_\infty = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{u}_{L,\infty} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{u}_{c,\infty} = 0}$$

2. D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que la grandeur y correspond à l'intensité i.

3. En appliquant la loi des mailles, on trouve :

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

4. Le discriminant de l'équation caractéristique s'écrit :

$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1) < 0$$

L'évolution est donc pseudo-périodique, et les racines complexes conjuguées du polynôme s'écrivent :

$$r_{\pm} = -m\omega_0 \pm j\Omega$$

où Ω désigne la **pseudo-pulsation**. On peut l'évaluer graphiquement grâce à la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Si on lit $T' = t_2 - t_1$, alors :

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

Compte-tenu des conditions initiales, on peut exprimer la solution $i(t)$:

$$\boxed{i(t) = -\frac{U_0}{L\Omega}\sin(\Omega t)e^{-m\omega_0 t}}$$

5. Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{soit} \quad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T/4$ et $t_2 = 7T/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{-7m\omega_0 t'/4}}{e^{-3m\omega_0 t'/4}} = e^{-m\omega_0 t'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple, on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\approx \omega_0$ et donc $T \approx 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \approx e^{-2\pi m}}$$

Circuit bouchon

1. Les impédances s'ajoutant en série,

$$\boxed{\underline{Z_s} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

En factorisant par r,

$$\underline{Z_s} = r\left[1 + \frac{r}{jL\omega} + \frac{1}{jrC\omega}\right]$$

Grâce aux expressions de Q et ω_0, on identifie ainsi :

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{r} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{L\omega_0^2}{r} = \frac{1}{rC}$$

On en déduit ainsi :

$$\boxed{\underline{Z_s} = r\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}$$

2. En sommant les admittances montées en parallèle,

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \frac{1}{r + jL\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{1 + jC\omega(r + jL\omega)}$$

Factorisons par r au numérateur et par $jC\omega$ au dénominateur :

$$\underline{Z} = \frac{r\left(1 + \dfrac{jL\omega}{r}\right)}{jC\omega\left(\dfrac{1}{jC\omega} + r + jL\omega\right)}$$

On en déduit ainsi directement la forme cherchée

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z_s}}}$$

3. Compte tenu des hypothèses,

$$1 + \frac{jQ\omega}{\omega_0} \approx \frac{jQ\omega}{\omega_0}$$

donc

$$\underline{Z} \approx \frac{Qr}{C\omega_0\underline{Z_s}}$$

Or, d'après les réponses de la Q1,

$$Q\omega_0 = \frac{1}{rC} \quad \text{et} \quad C\omega_0 = \frac{1}{rQ}$$

d'où

$$\boxed{\underline{Z} \approx \frac{Q^2r^2}{\underline{Z_s}}}$$

4. D'après la question précédente, $|\underline{Z}|$ est maximal lorsque $|\underline{Z_s}|$ est minimal. Or d'après la question 1,

$$|\underline{Z_s}| = r\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Ainsi $|\underline{Z}$ est maximal lorsque le terme entre parenthèses est nul, soit pour $\omega = \omega_0$.

A cette pulsation, $\underline{Z_s} = r$, donc

$$\underline{Z} \approx Q^2 r$$

Le dipôle est donc équivalent à une résistance $Q^2 r \gg r$ qui peut être très élevée : **le circuit bloque le passage du courant, d'où la dénomination de circuit bouchon.**

$\boxed{\textbf{5.}}$ En utilisant les amplitudes complexes, et comme $\omega = \omega_0$,

$$\underline{I_c} = \underline{Y_c} E = jC\omega_0 E_0 = \frac{j\omega_0 E_0}{rQ\omega_0} = j\frac{E_0}{rQ}$$

On en déduit $|\underline{I_c}| = E_0/rQ$ et $\arg(\underline{I_c} = +\pi/2$, d'où

$$\boxed{i_c(t) = \frac{E_0}{rQ}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})}$$

Si Q est très élevé, l'amplitude est comme attendue très faible.

De même, on exprime $i_L(t)$:

$$\underline{I_L} = \underline{Y_L} E = \frac{1}{r + jL\omega} E_0 = \frac{1}{r\left(1 + \frac{jL\omega}{r}\right)} E_0 \approx \frac{1}{jQr} E_0$$

On en déduit $|\underline{I_L}| = E_0/rQ$ et $\arg(\underline{I_L} = \pi/2$, d'où

$$\boxed{i_L(t) = \frac{E_0}{rQ}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}$$

On constate que les deux intensités sont d'amplitude proportionnelle à $1/Q$ et sont donc très faibles, comme attendu. De plus, i_c et i_L sont en opposition de phase et de même amplitude : leur somme $i_C + i_L$ est donc nulle, le circuit bouchon n'est traversé par aucun courant à la pulsation de résonance, ce qui explique à nouveau sa dénomination.

Filtre de Wien *(Oral banque PT)*

$\boxed{\textbf{1.}}$ Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $s = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et ainsi on a également $s = 0$. Selon toute vraisemblance, ce filtre est donc un **filtre passe-bande**.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Notons $\underline{Y}$ l'admittance de l'association R, C parallèle.

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{1 + 1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1}$$

> **Remarque :** on voit ici l'intérêt de ne pas "foncer tête baissée" dans les calculs en mettant les fractions sous le même dénominateur : les développements sont alors beaucoup plus simples et concis.

3. En réecrivant la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + jx + \dfrac{j}{x}} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{j}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

on identifie :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathrm{H}_0 = 1/3} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Q} = 1/3}$$

4. Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne le gain maximal $G_{\max} = 1/3$, soit $G_{dB} = 20\log(1/3) = 9{,}5$ dB. La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0, **la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.**

5. Dans la limite **très basse fréquence**, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{-jQ/x} = j\frac{H_0 x}{Q} \quad \text{d'où} \quad G_{dB} = 20\log x \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

De même, dans la limite **très haute fréquence**, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{jQx} \quad \text{d'où} \quad G_{dB} = -20\log x \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte deux asymptotes de pente ± 20 dB/décade passant par $G_{\mathrm{dB}} = 0$ pour $x = 1$, alors que le diagramme de Bode en phase compte deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm\pi/2$. Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{\mathrm{dB}} = -9{,}5$ dB en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté sur la figure 1.

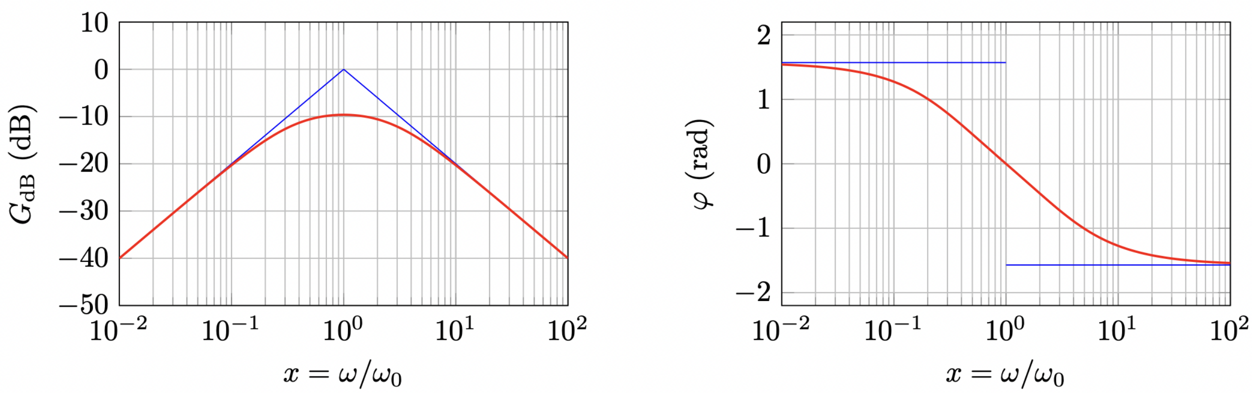


FIGURE 1 – Diagramme de Bode du filtre de Wien : diagramme asymtptoique en bleu, diagramme réel en rouge.

6. Numériquement, $\omega_0 = 2,0.10^3$ rad.s[1]. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre

▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad

▷ Le terme pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal)

▷ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ -1,2 rad. Ainsi,

$$\boxed{s(t) = E_0\cos(\omega t - 1,2) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t + 1,2)}$$