Fiche bilan n°3 **Physique**

Mécanique

I - Ressources interactives

• **L'essentiel du cours sous forme de cartes mémos :** cartes réalisées par Christophe Cayssiols

Cartes utilisables pour les révisions de mécanique, à l'exception du mouvement des particules chargées.

• **Qmax : QCM direct d'applications de cours**

Choisir d'abord le mode "j'apprends" puis éventuellement le mode "je révise". Ces QCM correspondent au programme de PCSI, certaines notions peuvent donc vous être inconnues : me demander en cas de doute.

II - Théorèmes de la mécanique du point

II.A - Aborder un problème de mécanique du point

Il est essentiel, pour appliquer les théorèmes qui suivront, de poser correctement le cadre d'étude. Pour cela, il est nécessaire de définir plusieurs choses, résumées ci-dessous :

▷ Le **système :** on définit le système d'étude, que l'on assimilera à un point matériel de masse m. On note généralement ce système entre accolades.

▷ Le **référentiel :** on donne le référentiel dans lequel on étudie le mouvement. On rappelle les trois principaux référentiels : **terrestre (ou laboratoire)**, **géocentrique** et **héliocentrique**. Celui-ci sera considéré comme **galiléen** en bonne approximation.

▷ Les **coordonnées** choisies pour l'étude : elles seront **cartésiennes**, **polaires** ou **cylindriques** (ou très rarement sphériques). Un schéma est vivement conseillé.

▷ Le **bilan des forces** s'exerçant sur le système. On liste les forces appliquées au système, en les explicitant sur le schéma précédent si cela est possible. On donnera leurs expressions dans le système de coordonnées choisi.

II.B - Principe fondamental de la dynamique

- **Autre nom :** deuxième loi de Newton.
- **Hypothèses :** point matériel M + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du PFD

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces qui s'exercent sur lui.

$$\frac{d\overrightarrow{p}(M)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

- **Informations obtenues ou dont on a besoin :**

▷ si toutes les forces sont connues, on obtient l'équation différentielle vectorielle vérifiée par $\overrightarrow{v}(M)$. On peut ainsi en déduire les lois horaires ou l'équation de la trajectoire si tel est l'objectif.

▷ si la vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des forces inconnues, en particulier les forces de liaison (tension d'un fil, réaction du support).

II.C - Théorème du moment cinétique

- **Hypothèses :** point matériel M + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TMC

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O est égal à la somme des moments des forces qui s'exercent sur lui.

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{F_i})$$

avec $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}$ et $M(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_i}$

- **Informations obtenues ou dont on a besoin :**

▷ le TMC apporte exactement la même information que le PFD, qui est souvent plus simple à utiliser pour des mouvements de **rotation**.

▷ l'utilisation la plus classique est le cas de **conservation :** si la somme des moments des forces est nulle, alors $\overrightarrow{L_O}(M)$ est constant et le mouvement est alors plan, dans le plan orthognal à la direction de $L_O(M)$ (cf. chapitre 15).

II.D - Théorème de l'énergie cinétique (forme instantanée)

- **Autre nom :** théorème de la puissance cinétique.
- **Hypothèses :** point matériel M + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TEC sous forme instantanée

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui s'exercent sur lui.

$$\frac{dE_c(M)}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F_i})$$

avec $E_c(M) = \dfrac{1}{2}mv(M)^2$ et $\mathcal{P}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{v}(M)$

• **Informations obtenues ou dont on a besoin :**

▷ si toutes les puissances sont connues, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par $v(M)$, mais dans le cas général d'un point matériel elle contient moins d'information que celle issue du PFD (équation vectorielle équivalente à trois équations scalaires) ;

▷ une utilisation très classique est le cas de conservation : si la somme des puissances est nulle, alors E_c et donc v est constante, ce qui signifie que le mouvement est **uniforme**.

II.E - Théorème de l'énergie cinétique (forme intégrale)

• **Hypothèses :** point matériel M + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TEC sous forme intégrale

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre un état initial A et un état final B est égale à la somme des travaux des forces qui s'exercent sur lui entre ces deux mêmes états.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}(\overrightarrow{F_i})$$

avec $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \displaystyle\int_A^B \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{dl}$

• **Informations obtenues ou dont on a besoin :**

▷ si toutes les forces sont connues, on en déduit la valeur de la vitesse v au point d'arrivée connaissant la vitesse intiale ;

▷ si les vitesses de départ et d'arrivée sont connues, on peut en déduire l'énergie fournie ou prélevée au système par une force inconnue (par exemple les frottements, moteur, freinage, etc.) sans avoir besoin de calculer cette force ;

▷ plus généralement, dès qu'on cherche des informations sur la vitesse en fonction de la position plutôt que du temps, les versions intégrales des théorèmes énergétiques sont bien plus adaptées que tous les théorèmes faisant intervenir des dérivées.

II.F - Théorème de l'énergie mécanique (forme instantanée)

• **Autre nom :** théorème de la puissance mécanique.

• **Hypothèses :** point matériel M + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TEM sous forme instantanée

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur lui.

$$\frac{dE_m(M)}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{nc,i}})$$

avec $E_m(M) = \frac{1}{2}mv(M)^2 + \sum_i E_{p,i}$, où $E_{p,i}$ désigne l'énergie potentielle associée à la force conservative $\overrightarrow{F_i}$.

• **Remarque :** on rappelle qu'une force conservative est une force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi. Son travail s'écrit alors :

$$W_{A \to B}(\overrightarrow{F_i}) = -\Delta E_{p,i}$$

• **Informations obtenues ou dont on a besoin :**

▷ L'utilisation la plus courante est le cas de conservation : si le système n'est soumis qu'à des actions mécaniques conservatives ou qui ne travaillent pas (par exemple la réaction normale d'un support, ou la tension d'un fil), alors $\frac{dE_m}{dt} = 0$. Dès qu'il s'agira de montrer que l'énergie mécanique se conserve, on utilisera le TEM sous forme instantanée.

II.G - Théorème de l'énergie mécanique (forme intégrale)

• **Hypothèses :** point matériel M + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TEM sous forme intégrale

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux états A et B est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur lui entre ces mêmes états.

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum_i W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc,i}})$$

où $\sum_i W_{AB}(\overrightarrow{F_{nc,i}})$ désigne le travail des forces **non conservatives** s'exerçant sur le système.

• **Informations obtenues ou dont on a besoin :**

▷ la version intégrale du TEM ne sert pratiquement que dans le cas de conservation : si le point matériel n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas, alors l'énergie mécanique est donnée par les conditions initiales :

$$E_m = \text{cste} \quad \Longleftrightarrow \quad E_m(M) = E_m(t=0)$$

III - Théorèmes de la mécanique du solide

III.A - Aborder un problème de mécanique du solide

L'essentiel du cadre d'étude a été donné dans le II.A : il suffit ici de préciser ici que le système est un **solide**. Il peut également être bon de rappeler, lorsque c'est le cas, que le solide est **indéformable**. Le cas du tabouret d'inertie est le contre exemple intuitif d'un solide **déformable**.

On précisera donc :

▷ Le **système**, assimilé à un solide indéformable en précisant son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

▷ Le **référentiel d'étude**.

▷ Le **bilan des actions mécaniques** s'exerçant sur le système. Pour un solide, il existe des actions mécaniques qui ne sont pas des forces (par exemple, un couple). On exprimera le moment de chacune des ces actions calculé par rapport à l'axe de rotation.

II.B - Théorème du moment cinétique scalaire

- **Hypothèses :** solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TMC scalaire

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un solide par rapport à un axe Δ est égal à la somme des moments des actions mécaniques par rapport à ce même axe qui s'exercent sur lui.

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}$$

avec $L_\Delta = J_\Delta \omega$ avec J_Δ le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ, ω sa vitesse angulaire ($\omega = \dot{\theta}$).

- **Remarques :**

▷ il est essentiel de préciser l'axe de rotation du solide si l'énoncé n'en fait pas mention ;

▷ le moment vectoriel d'une force est un vecteur, le moment scalaire est ... un scalaire ! Soyez donc vigilants quant aux flèches sur vos copies.

▷ $\mathcal{M}_i$ peut désigner un couple, généralement noté $\mathcal{C}$ ou Γ

- **Informations obtenues ou dont on a besoin :**

▷ si tous les moments sont connus, on obtient l'équation différentielle scalaire vérifiée par la vitesse de rotation ω ;

▷ si la vitesse angulaire $\omega(t)$ est connue à tout instant, on peut en déduire l'expression des moments inconnus, en particulier les moments de liaison et ceux exercés par des dispositifs d'asservissement (p.ex. si on impose au système de tourner à vitesse angulaire constante) ;

▷ lorsque l'expression d'une action mécanique est connue (par exemple la pesanteur), il peut être utile de calculer son moment associé par la méthode du **bras de levier :** $M_{\Delta,i} = \pm\|F\|d$, où d est le bras de levier, c'est-à-dire la distance du point d'application à l'axe de rotation, et le signe $\pm$ se détermine qualitativement (+ si l'action mécanique a tendance à faire tourner le solide dans le sens direct, - si c'est en sens indirect).

II.C - Théorème de l'énergie cinétique (forme instantanée)

- **Hypothèses :** solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TEC sous forme instantanée pour un solide

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide est égal à la somme des puissances des actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur lui.

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_i$$

avec $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2$ et $\mathcal{P}_i$ la puissance d'une action mécanique, qui s'exprime $\mathcal{P}_i = M_{\Delta,i}.\omega$

- **Remarque :**

  ▷ si le solide est **déformable**, il faut également prendre en compte la puissance des actions mécaniques **intérieures** au système.

II.D - Théorème de l'énergie cinétique (forme intégrale)

- **Hypothèses :** solide indéformable $\mathcal{S}$ + référentiel $\mathcal{R}$ galiléen.

Énoncé du TEC sous forme intégrale pour un solide

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux états A et B est égal à la somme des travaux des actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur lui.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB,i}$$

avec $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2$ et $W_{AB,i}$ le travail d'une action mécanique, qui s'exprime $W_{AB,i} = \int_A^B M_{\Delta,i}.d\theta$

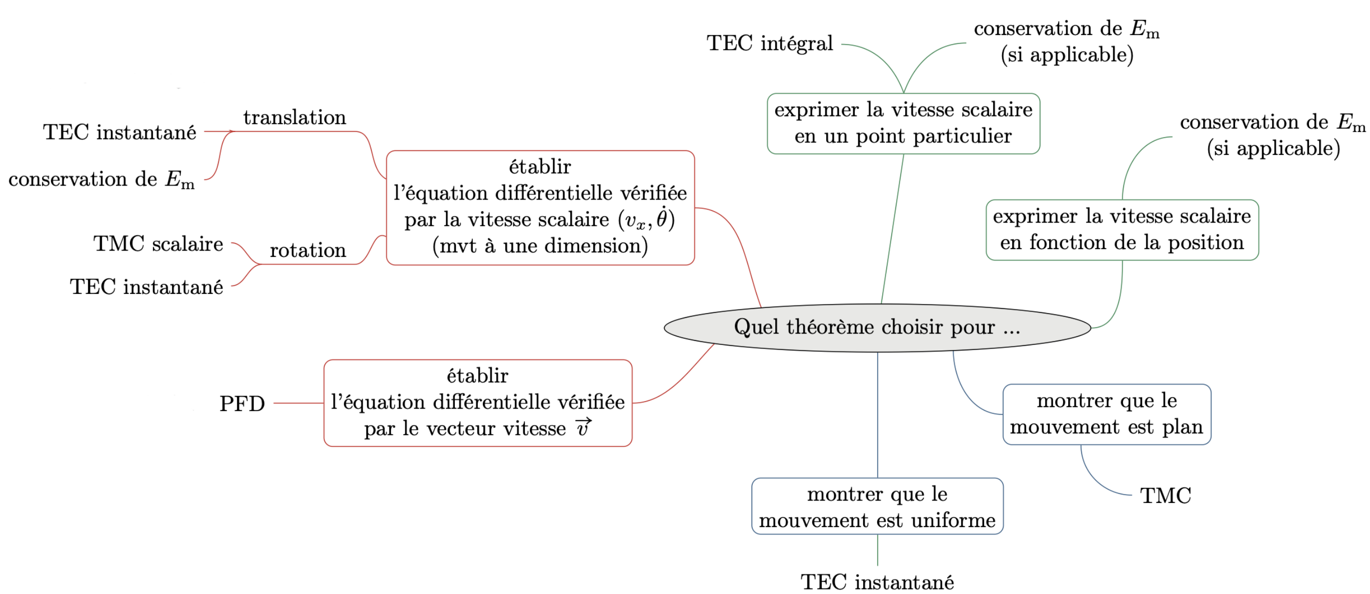
- **Remarque :**

  ▷ si le solide est **déformable**, il faut également prendre en compte le travail des actions mécaniques **intérieures** au système.

II.E - Analogies entre rotation et translation

Translation rectiligne	Rotation autour d'un axe fixe
z direction du mouvement	z axe de rotation
Position z Vitesse $\dot{z}$	Angle θ Vitesse angulaire $\dot{\theta}$
Masse m Quantité de mouvement $p_z = m\dot{z}$ Composantes des forces $F_{i,z}$	Moment d'inertie J Moment cinétique $L_z = J\dot{\theta}$ Moments et couples $\mathcal{M}_{z,i}$
Théorème de la résultante cinétique (projeté) : $\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = m\ddot{z} = \sum F_{i,z}$	Théorème du moment cinétique (scalaire) : $\dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_{z,i}$
Puissance d'une force $\mathcal{P} = F_z\dot{z}$ Travail $W = \displaystyle\int_{z_A}^{z_B} F_z \mathrm{d}z$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2$	Puissance d'un moment $\mathcal{P} = \mathcal{M}_z\dot{\theta}$ Travail $W = \displaystyle\int_{\theta_A}^{\theta_B} \mathcal{M}_z \mathrm{d}\theta$ Énergie cinétique $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$
Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(F_i)$ $\rightsquigarrow$ même équation que le PFD	Théorème de l'énergie cinétique instantané : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ $\rightsquigarrow$ même équation que le TMC
Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\dfrac{1}{2}mv_B^2 - \dfrac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W(F_i)$	Théorème de l'énergie cinétique intégral : $\dfrac{1}{2}J\dot{\theta}_B^2 - \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}_A^2 = \sum_i W(\mathcal{M}_i)$

IV - Schéma bilan : utilisation des théorèmes



V - Les démonstrations essentielles

1. Établir l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires.

2. Rappeler puis ensuite démontrer l'expression de l'accélération dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme et la commenter.

3. Établir l'équation de la trajectoire d'un point matériel en chute libre par application du PFD.

4. Établir l'équation du mouvement d'un pendule simple par application du PFD en coordonnées polaires.

5. Établir l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique masse-ressort en exploitant la conservation de l'énergie mécanique. La résoudre pour des conditions initiales $x(0) = X_0$ et $v(0) = 0$.

6. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle gravitationnelle, puis ensuite les démontrer. Le repérage doit être précisé par un schéma.

7. On lance à la verticale un projectile de masse m avec une vitesse v_0. Quelle hauteur maximale va-t-il atteindre avant de retomber ? On négligera les frottements liés à l'air.

8. Rappeler l'expression de la force de Lorentz. Montrer que la composante magnétique de cette force ne travaille pas.

9. Montrer qu'en ordre de grandeur, pour une particule chargée (proton ou électron), le poids est négligeable devant les composantes de la force de Lorentz.

10. Dans le cas d'une particule chargée soumise uniquement à un champ électrostatique, montrer que la trajectoire est un arc de parabole.

11. Dans le cas d'une particule chargée soumise uniquement à un champ magnétostatique, en admettant que le mouvement est circulaire, exprimer le rayon de la trajectoire. On se placera en coordonnées polaires.

12. Établir l'équation du mouvement du pendule pesant par application du théorème du moment cinétique scalaire **et** par application du théorème de l'énergie cinétique.

13. Expliquer qualitativement l'expérience du tabouret d'inertie.

14. Dans le cas d'un champ de force centrale quelconque, établir la conservation du moment cinétique et ses conséquences (planéité du mouvement et loi des aires).

15. En considérant le champ gravitationnel, construire l'énergie potentielle effective adaptée et l'utiliser pour discuter de la nature des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.

16. Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, montrer que le mouvement est uniforme et établir sa vitesse.

17. Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, établir la troisième loi de Kepler et la généraliser au cas d'une trajectoire elliptique. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

VI - Un chapitre, un exercice

VI.A - Cinématique du point

• Le caroussel

On considère un carrousel circulaire de rayon R en rotation autour de son centre O à la vitesse angulaire ω constante par rapport à un référentiel R. Un homme assimilé à un point se déplace à sa surface à la vitesse v constante.

1. a) L'homme se déplace en suivant un rayon du cercle (Figure 1a). Il se trouve à l'instant initial en 0 et se dirige dans la direction $\theta = 0$. Déterminer ses coordonnées polaires $r(t)$ et $\theta(t)$ dans le référentiel R.

1. b) Même question si l'homme se déplace à la vitesse v constante le long d'un cercle de rayon r_0 de centre 0, dans le même sens que la rotation du carrousel (figure 1b), avec $\theta = 0$ à l'instant initial.

2. Déterminer dans les deux cas précédents le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans R de l'homme.

3. Déterminer, dans les deux cas précédents la valeur maximale du rayon R pour laquelle la norme de l'accélération reste inférieure à $g = 9{,}8\text{m.s}^{-2}$ si $v = 1{,}0\text{m.s}^{-1}$ et $\omega = 2\pi/5$ rad.s^{-1}.

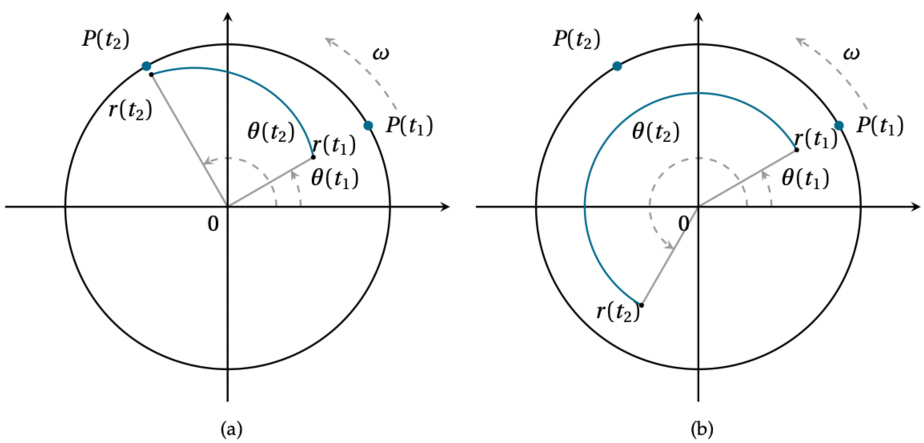
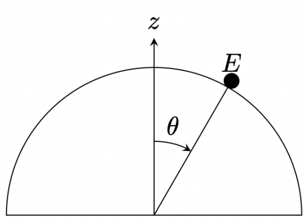


FIGURE 1 – Trajectoires de l'homme entre les instants t_1 et t_2. Le point P est un point fixe du carrousel.

VI.B - Dynamique du point

• Glissade sur un igloo



Cet exercice s'intéresse à la glissade d'un enfant esquimau E de masse m sur le toit d'un igloo d'où il s'élance sans vitesse initiale. L'enfant glisse sans aucun frottement à la surface de l'igloo. Sa position est repérée par l'angle θ. Pour simplifier, l'igloo est supposé sphérique de rayon R.

1. Appliquer le PFD à l'enfant pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement, qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre équation contient-elle ?

2. En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, montrer que

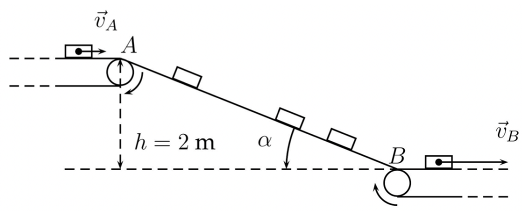
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$$

3. En déduire l'expression de la force de réaction de l'igloo.

4. L'enfant décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

VI.C - Énergétique du point

• Convoyeur de colis



Étudions un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal. Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0,2$ m.s^{-1}, puis glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Ils sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse $v_B = 0,5$ m.s^{-1}.

▷ Déterminer l'expression puis la valeur de α pour que le convoyeur fonctionne correctement, c'est-à-dire pour que les colis arrivent en B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

Donnée : suivant les lois de Coulomb du frottement solide, lors du glissement, les forces exercées par le tapis sur le colis sont reliées par $T = fN$ où T et N sont respectivement les normes de la réaction tangentielle et normale du support et $f = 0,4$ est le coefficient de frottement.

VI.D - Mouvement de particules chargées

• Électron dans un champ électromagnétique

Un électron, de masse $m_e = 10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1,6.10^{-19}$ C, pénètre avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$, dans une région où règnent un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ uniformes, orthogonaux entre eux et à $\overrightarrow{v_0}$. Précisément, dans la base directe $\{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\}$, du repère cartésien $Oxyz$ (x, y et z sont les coordonnées cartésiennes de l'électron), $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_z}$, E, B et v_0 étant positifs. L'origine O du repère est prise à l'endroit où l'électron pénètre dans la zone des champs. La norme de la vitesse v_0 est de 1000 km.s^{-1}.

1. On considère dans un premier temps que $B = 0$, de sorte que l'électron n'est soumis qu'au champ électrostatique. Quelle est l'équation vectorielle du mouvement ? ($\overrightarrow{a}$ désigne l'accélération de l'électron)

(a) $\overrightarrow{a} = \dfrac{e\overrightarrow{E}}{m_e}$ (b) $\overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{E}}{em_e}$ (c) $\overrightarrow{a} = -em_e\overrightarrow{E}$ (d) $\overrightarrow{a} = -\dfrac{e\overrightarrow{E}}{m_e}$

2. Quelles sont la nature et l'équation de la trajectoire de l'électron ?

(a) La trajectoire est une portion de parabole d'équation $\dfrac{eE}{m_e}\left(\dfrac{z}{v_0}\right)^2$

(b) La trajectoire est une portion de droite d'équation $\dfrac{eE}{m_e}\dfrac{z}{v_0}$

(c) La trajectoire est une portion de parabole d'équation $-\dfrac{eE}{m_e}\left(\dfrac{z}{v_0}\right)^2$

(d) (a) La trajectoire est une portion de droite d'équation $-\dfrac{eE}{m_e}\dfrac{z}{v_0}$

3. On place un écran d'observation parallèlement au plan Oxy en $z_0 = 0,2$ m. Sachant que $E = 10$ V.m^{-1}, calculer l'abscisse x_e de l'impact de l'électron sur l'écran.

(a) $x_e \approx 4$ mm (b) $x_e \approx -4$ mm (c) $x_e \approx 4$ cm (d) $x_e \approx -4$ cm

4. On considère maintenant $E = 0$ et B non nul, l'électron pénètre donc dans une zone où règne un champ magnétostatique uniforme. Donner l'expression de la force de Lorentz $\overrightarrow{F_L}$ qui s'exerce sur l'électron au moment où il pénètre dans cette région.

(a) $\overrightarrow{F_L} = v_0\overrightarrow{B}$ (b) $\overrightarrow{F_L} = -e\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B}$ (c) $\overrightarrow{F_L} = e\overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B}$ (d) $\overrightarrow{F_L} = e\overrightarrow{v_0}.\overrightarrow{B}$

5. Parmi les affirmations proposées, quelle est celle qui est exacte ?

(a) La trajectoire de l'électron est rectiligne uniforme.

(b) La trajectoire de l'électron est parabolique.

(c) La trajectoire de l'électron est circulaire de rayon $R = \dfrac{m_e v_0}{eB}$

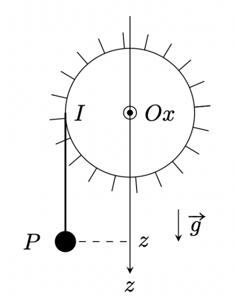
(d) La trajectoire de l'électron est circulaire de rayon $R = \dfrac{e v_0}{m_e B}$

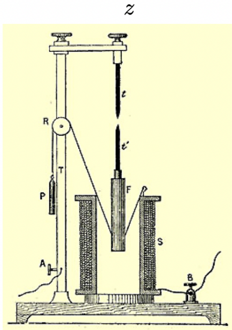
6. On a maintenant $E \neq 0$ et $B \neq 0$. Pour quel rapport E/B le mouvement de l'électron est-il rectiligne et uniforme ?

(a) $\dfrac{E}{B} = v_0$ (b) $\dfrac{E}{B} = 1$ (c) $\dfrac{E}{B} = \dfrac{1}{v_0}$ (d) On ne peut pas conclure

VI.E - Rotation et mouvement d'un solide

• **Régulateur d'Archereau-Foucault**





Un régulateur d'Archereau–Foucault, schématisé ci-contre, est un dispositif ancien, qui a été utilisé par exemple en horlogerie ou dans des boîtes à musique. On le modélise de façon simple par un contrepoids P de masse m accroché à un fil de masse négligeable devant m. Le fil est enroulé autour d'un cylindre tournant librement autour de son axe Ox fixé à un bâti, de rayon R et de moment d'inertie J_x. La chute de P entraîne la mise en rotation du cylindre. Ce cylindre est muni d'ailettes pour augmenter l'effet des frottements de l'air. On modélise leur action mécanique sur le cylindre par un couple de frottement $\Gamma_f = -\lambda\omega$, où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

1. Justifier que $\dot{z} = R\omega$.

2. Montrer que la force T de tension du fil exercée en I sur le cylindre est donnée par

$$\overrightarrow{T} = m(g - \ddot{z})\overrightarrow{u_z}$$

3. En appliquant la loi du moment cinétique au cylindre, montrer que la vitesse angulaire de rotation ω vérifie l'équation différentielle

$$(J_x + mR^2)\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = mgR$$

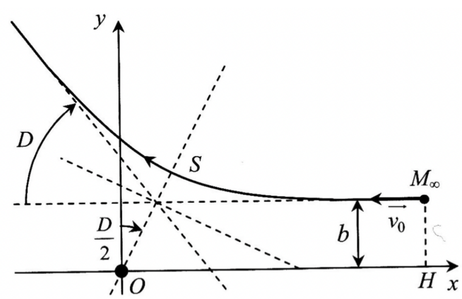
4. Retrouver cette équation différentielle en appliquant la loi du moment cinétique au système composé du cylindre, du fil et du contrepoids P.

5. Résoudre l'équation différentielle. En déduire l'intérêt du dispositif.

VI.F - Mouvement à force centrale

• **Expérience de Rutherford**

Entre 1909 et 1911, Ernest Rutherford et ses deux étudiants Hans Geiger et Ernest Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α, dont Rutherford avait précédemment montré qu'il s'agit de noyaux d'hélium. Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne recontraient que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement. En reliant les angles de déviation aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.



Modélisons l'expérience en considérant une particule α de masse m et de charge $2e$, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\overrightarrow{e_x}$ et s'approchant avec un paramètre d'impact b d'un unique noyau cible de numéro atomique Z. Le paramètre d'impact est la distance minimale entre le prolongement de la trajectoire rectiligne de la particule et le noyau situé en O. Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant situé sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est la branche d'hyperbole représentée ci-contre.

Données : $\epsilon_0 = 8,9.10^{-12}$ F.m^{-1} ; $m = 6,6.10^{-27}$ kg et $Z_{\mathrm{Au}} = 79$.

1. Exprimer la force électrique subie par la particule α sous la forme $\overrightarrow{F} = \dfrac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, et exprimer l'énergie potentielle d'interaction.

2. - Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur à partir des conditions initiales.

3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de la particule α en O est un vecteur constant et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires dans le plan (Oxy), montrer que $\overrightarrow{L_O}$ s'exprime simplement en fonction de r et $\dot{\theta}$.

4. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^\star(r)$$

en explicitant la fonction $E_p^\star(r)$. Comment l'appelle-t-on ?

5. On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\min} = OS$ la distance minimale d'approche. Simplifier l'expression de E_m lorsque $r = r_{\min}$. En déduire :

$$r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)}\right]$$

6. On peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donnée par

$$\tan\frac{D}{2} = \frac{K}{mbv_0^2}$$

Calculer b puis $r_{\min}$ pour $D_1 = 60°$ et $D_2 = 180°$ (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

VII - Correction des exercices

Cinématique du point - Caroussel

1. a) On a immédiatement $\boxed{\mathrm{r = vt}}$. L'homme met le même temps que le carrousel pour effectuer un tour complet autour de O sa vitesse angulaire est donc la même et on a $\boxed{\theta = \omega t}$ comme pour un point fixe du carrousel.

1. b) On a cette fois-ci $r = r_0$. En un temps Δt, l'homme a tourné de $v\Delta t/r_0$ par rapport au rayon du carrousel sur lequel il se trouvait initialement, qui a lui-même tourné de ωt. Sa vitesse angulaire est donc $\omega + v/r_0$ et on a

$$\boxed{\theta = \left(\omega + \frac{v}{r_0}\right) t}$$

2. On écrit les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$$

Dans le premier cas, on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v(\overrightarrow{e_r} + \omega t\overrightarrow{e_\theta}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = \omega v(2\overrightarrow{e_\theta} - \omega t\overrightarrow{e_r})}$$

et dans le second cas :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = (v + r_0\omega)\overrightarrow{e_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = -r_0\left(\omega + \frac{v}{r_0}\right)^2 \overrightarrow{e_r}}$$

3. Dans le premier cas, on exprime la norme a de $\overrightarrow{a}$:

$$a = v\omega\sqrt{4 + (\omega t)^2} = v\omega\sqrt{4 + \left(\frac{r\omega}{v}\right)^2}$$

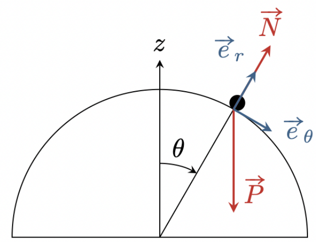
Cette expression est croissante et maximale pour $r = R$, on résout alors $a = g$. On obtient ainsi $\boxed{\mathrm{R = 6{,}0\ m}}$.

Dans le second cas, on obtient directement

$$a = r_0\left(\omega + \frac{v}{r_0}\right)^2$$

On résout $a = g$ pour $\boxed{\mathrm{r_0} = R = 4,5\ \mathrm{m}}$.

Dynamique du point - Glissade sur un igloo



1. Le système étudié est l'enfant esquimau, en mouvement dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}_N$ de l'igloo, qui est sans frottement. Dans la base polaire, voir figure ci-dessus, on a

$$\vec{R}_N = R_N \vec{e_r} \quad \text{et} \quad \vec{P} = -mg\cos\theta\vec{e_r} + mg\sin\theta\vec{e_\theta}$$

Exprimons l'accélération de l'enfant. Comme l'igloo est sphérique, alors $r = R = \text{cste}$.

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r \quad \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

D'après le PFD, on a

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \end{cases}$$

L'équation du mouvement est celle projetée sur $\vec{e}_\theta$. L'équation projetée sur $\vec{e}_r$ contient en effet une force inconnue R_N, et ne permet donc pas de déterminer le mouvement... Par contre elle permet de déterminer cette force.

2. L'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

ce qui donne en multipliant par $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

Intégrons cette équation par rapport au temps :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta = C$$

Comme l'enfant s'élance de $\theta = 0$ sans vitesse ($\dot{\theta}(0) = 0$), alors $C = g/R$. On obtient finalement le résultat donné dans l'énoncé

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)}$$

La méthode pour passer d'une équation sur $\ddot{\theta}$ à une équation portant sur $\dot{\theta}^2$ est à retenir. C'est la même méthode qui permet d'établir le théorème de l'énergie cinétique (cf chapitre 12), et on retrouve des méthodes voisines pour démontrer les expressions des énergies potentielles ... et aussi celles de l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Il est toutefois bien plus rentable pour cette question d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique plutôt que le PFD.

3. D'après la projection radiale du PFD,

$$-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta \quad \text{donc} \quad \boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}$$

4. L'enfant décolle de l'igloo si la force R_N de la liaison avec l'igloo s'annule, donc pour un angle θ_d tel que

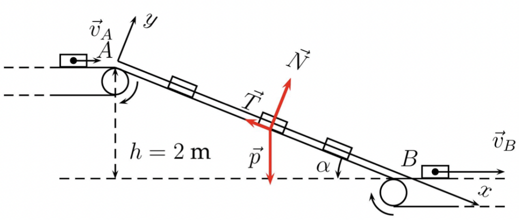
$$3\cos\theta_d - 2 = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\theta_d = \arccos\frac{2}{3} \approx 48°}$$

Énergétique du point - Convoyeur de colis

Comme on cherche uniquement les vitesses en deux points (A et B), la **version intégrale du théorème de l'énergie cinétique** est la méthode à privilégier. On raisonne sur un paquet de masse m, en mouvement par rapport au référentiel terrestre (celui du centre de tri), galiléen en très bonne approximation. Calculons les travaux des forces s'exerçant sur le paquet.

Le paquet subit bien sûr son poids $\overrightarrow{P}$, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur. Sur la trajectoire AB où le colis subit une dénivellation h, le poids est moteur et son travail vaut

$$W(\overrightarrow{P}) = +mgh > 0$$



Il subit également la réaction du plan incliné $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$, force évidemment non-conservative. Le travail de la composante normale $\overrightarrow{N}$ est nul puisqu'elle est normale au mouvement à tout instant. Pour calculer le travail de $\overrightarrow{T}$, il nous faut d'abord déterminer son expression.

En utilisant le repérage ci-contre, on sait qu'elle s'écrit

$$\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_x}$$

mais il faut calculer sa norme, ce qui ne peut se faire que via la norme de N et la loi de Coulomb. Par projection de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe Oy,

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha = 0$$

car le mouvement se fait sur le plan incliné. On en déduit donc

$$N = mg\cos\alpha \quad \text{d'où} \quad T = fmg\cos\alpha$$

et ainsi

$$W(\overrightarrow{T}) = \int_A^B \overrightarrow{T}.\overrightarrow{dl} = -fmg\cos\alpha\int_A^B dx = -fmg\cos\alpha L$$

où L est la longueur totale du plan incliné. Un peu de trigonométrie donne $\sin\alpha = h/L$ soit $L = h/\sin\alpha$. On peut alors réecrire le travail de la réaction tangentielle :

$$W(\overrightarrow{T}) - fmgh\frac{1}{\tan\alpha}$$

Appliquons maintenant le théorème de l'énergie cinétique au colis, assimilé à un point matériel de masse m :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\overrightarrow{T}) + W(\overrightarrow{P}) = mgh - fmgh\frac{1}{\tan\alpha}$$

ce qui donne

$$\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{v_A^2 - v_B^2 + 2gh}{2fgh}$$

d'où, finalement :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{2fgh}{v_A^2 - v_B^2 + 2gh}}$$

L'application numérique donne ainsi $\tan\alpha = 0,4$ soit $\boxed{\alpha = 22°}$.

Mouvement de particules chargées - Électron dans un champ e.m

1. On raisonne sur l'électron, soumis à la seule force de Lorentz. Par application du principe fondamental de la dynamique,

$$m\overrightarrow{a} = -e\overrightarrow{E} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{a} = -\frac{e}{m}\overrightarrow{E}}$$

▶ **Réponse (d)**

2. Intégrons vectoriellement l'équation du mouvement en tenant directement compte des conditions initiales,

$$\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -\frac{e}{m}\overrightarrow{E} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{v} = -\frac{e}{m}\overrightarrow{E}t + \overrightarrow{v_0}$$

et une seconde intégration pour le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ donne

$$\overrightarrow{OM} = -\frac{e}{2m}\overrightarrow{E}t^2 + \overrightarrow{v_0}t \tag{1}$$

soit, par projection sur x et z :

$$x(t) = -\frac{eE}{2m}t^2 \quad \text{et} \quad z = v_0 t \iff t = \frac{z}{v_0}$$

ce qui conduit à l'équation de la trajectoire

$$\boxed{x - \frac{-eE}{2m}\left(\frac{z}{v_0}\right)^2}$$

▶ **Réponse (c)**

3. L'application numérique donne $x_e \approx -4$ cm.

▶ **Réponse (d)**

4. Pour un électron de charge $-e$, la force de Lorentz magnétique s'écrit, par définition :

$$F_L = -ev_0 \wedge \overrightarrow{B}$$

▶ **Réponse (b)**

5. Dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, le mouvement de l'électron est circulaire uniforme donc son accélération est radiale centripète. Pour trouver le rayon de la trajectoire, il suffit d'écrire le PFD dans la base cylindrique de centre le centre de la trajectoire et d'axe Oy parallèle à B. On a alors

$$m\overrightarrow{a} = -m\frac{v_0^2}{R_c}\overrightarrow{e_r} = -ev_0\overrightarrow{e_\theta} \wedge B\overrightarrow{e_y} = -ev_0B\overrightarrow{e_r}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{R_c = \frac{mv_0}{eB}}$$

▶ **Réponse (c)**

6. Le mouvement est rectiligne uniforme à vitesse $\overrightarrow{v_0}$ si la force de Lorentz s'annule, c'est-à-dire si

$$\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v_0} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0} \quad \Longleftrightarrow \quad E - v_0B = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{E}{B} = v_0}$$

▶ **Réponse (a)**

Mouvement d'un solide - Régulateur d'Archereau-Foucault

Toute l'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen en très bonne approximation.

1. Comme le fil est inextensible et tendu, aussi bien sur la partie "libre" que sur la partie enroulée, alors tous les points du fil ont la même vitesse instantanée. Ceux encore enroulés sur le cylindre sont en mouvement circulaire à vitesse angulaire ω, leur vitesse vaut donc $R\omega$. Le point d'attache entre le contrepoids P et le fil se déplace lui à la vitesse $\dot{z}$ de P. Ainsi,

$$\boxed{\dot{z} = R\omega}$$

2. Considérons comme système le point matériel P. Il est soumis à son poids $m\overrightarrow{g}$ et à la force de tension du fil $\overrightarrow{T}'$, verticale et vers le haut. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\ddot{z}\overrightarrow{u_z} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T}' \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{T}' = m(\ddot{z} - \overrightarrow{g})\overrightarrow{u_z}$$

D'après le principe des actions réciproques, le contrepoids P exerce sur le fil une force $-\overrightarrow{T}'$. Comme le fil est supposé idéal et tendu, alors il transmet parfaitement la force et exerce en I la même force $-\overrightarrow{T}' = \overrightarrow{T}$ par définition. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{T} = m(\overrightarrow{g} - \ddot{z})\overrightarrow{u_z}}$$

3. Définissons le problème avant d'appliquer le théorème scalaire du moment cinétique.

▷ Système : le cylindre, solide de moment d'inertie J_x ;

▷ Bilan des actions mécaniques :

- la liaison pivot et le poids du cylindre exercent tous les deux un moment nul par rapport à l'axe Ox ;
- les frottements avec l'air exercent un couple $\Gamma_f = \lambda\omega$;
- la force $\overrightarrow{T}$, de bras de levier R, a un moment non nul qui vaut $+TR$ car elle tend à faire tourner le cylindre dans le sens direct.

Comme le moment cinétique du cylindre par rapport à Ox vaut $J_x\omega$, on a d'après le théorème du moment cinétique

$$J_x\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + m(\overrightarrow{g} - \ddot{z})R$$

Or, d'après la question 1, $\dot{z} = R\omega$, ainsi

$$J_x\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega + mgR - mR^2\frac{d\omega}{dt}$$

soit, en regroupant les termes :

$$\boxed{(J_x + mR^2)\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = mgR}$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ Si l'on applique la loi du moment cinétique au système composé, les forces de tension du fil sont des forces internes au système et il n'est plus nécessaire de les calculer puisqu'elles n'interviennent pas dans la loi du moment cinétique. En revanche, le moment cinétique total se compose désormais de deux termes grâce à la propriété d'additivité : le moment cinétique du cylindre et celui du contrepoids,

$$L_x = Lx(\text{cylindre}) + L_x(P) = J_x\omega + mR\dot{z}.$$

Le moment cinétique du contrepoids P se calcule par une technique de type bras de levier. Finalement, la loi du moment cinétique donne

$$\frac{d}{dt}(J_x\omega + mR\dot{z}) = \Gamma_f + \mathcal{M}_x(m\overrightarrow{g}) \quad \text{soit} \quad (J_x + mR^2)\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = mgR$$

ce qui donne bien la même équation qu'à la question précédente.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Écrite sous forme canonique, cette équation devient

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\lambda}{J_x + mR^2}\omega = \frac{mgR}{J_x + mR^2}$$

faisant apparaître un temps caractéristique $\tau = \dfrac{J_x + mR^2}{\lambda}$

Comme le forçage est constant, une solution particulière est donnée par

$$\omega_p = \frac{mgR}{\lambda}$$

et la solution générale est donnée par

$$\boxed{\omega(t) = Ae^{-t/\tau} + \omega_p}$$

où la constante A se détermine à partir des conditions initiales. Au bout d'une durée de l'ordre de 5τ, la vitesse de rotation devient donc pratiquement égale à ω_p : **le dispositif permet de réguler la vitesse de rotation du cylindre.**

Mouvement à force centrale - Expérience de Rutherford

$\boxed{\textbf{1.}}$ La force électrostatique entre les deux particules s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

or ici, $q_1 = 2e$ (charge de la particule α) et $q_2 = Ze$, où Z désigne le numéro atomique de l'or ($Z = 79$). Ainsi, on en déduit la force sous la forme K/r^2, avec

$$\boxed{K = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}}$$

2. Le système est uniquement soumis à la force électrostatique, qui est de surcroît **conservative**. D'après le théorème de l'énergie mécanique, il vient directement que l'énergie mécanique se conserve. Cette dernière est donc égale à sa valeur initiale tout au long du mouvement. Or, à $t = 0$, $E_m(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2$ (seule contribution de l'énergie cinétique, l'énergie potentielle étant nulle à l'infini). Ainsi,

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2}$$

3. Le moment cinétique se conserve. Il est donc égal, à tout instant, à sa valeur initiale $\overrightarrow{L_O}(0) = \overrightarrow{OM}(0) \wedge m\overrightarrow{v_0}$. Calculons le à l'aide de l'expression de $\overrightarrow{OM}(0)$:

$$\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}_\infty = OH\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y}$$

Ainsi, à l'instant initial,

$$\overrightarrow{L_O}(0) = m(OH\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y}) \wedge (-v_0\overrightarrow{e_x}) = \boxed{mbv_0\overrightarrow{e_z}}$$

Enfin, exprimons $\overrightarrow{L_O}$ en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{L_O} = m(r\overrightarrow{e_r}) \wedge (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = mr^2\dot{\theta}(\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{L_O} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}}$$

4. À un instant quelconque, l'énergie mécanique de la particule α s'écrit sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \frac{K}{r}$$

Pour l'écrire comme une fonction de r seulement, il faut remplacer la dépendance en $\dot{\theta}$ par une dépendance en r, ce qui est rendu possible grâce au moment cinétique,

$$\overrightarrow{L_O} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = mbv_0\overrightarrow{e_z}$$

ce qui permet d'isoler $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{bv_0}{r^2}$$

et d'écrire ainsi :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{b^2v_0^2}{r^4} + \frac{K}{r}$$

On en déduit alors la forme demandée :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\mathrm{p}^\star(r) \quad \text{avec} \quad \boxed{E_\mathrm{p}^\star(r) = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r^2} + \frac{K}{r}}$$

Cette fonction $E_\mathrm{p}^\star(r)$ est **l'énergie potentielle effective** de la particule α.

5. Lorsque la particule passe en S, sa distance à O est par définition minimale et donc $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique est donc tout simplement égale à $E_\mathrm{p}^\star(r_{\min})$:

$$E_m = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}}$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on en déduit :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{mb^2v_0^2}{r_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}}$$

Pour isoler $r_{\min}$, le plus naturel consiste à multiplier l'équation par $r_{\min}^2$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2r_{\min}^2 = \frac{1}{2}mb^2v_0^2 + Kr_{\min}$$

ce qui conduit à l'équation du second degré suivante :

$$\boxed{r_{\min}^2 - \frac{2K}{mv_0^2}r_{\min} - b^2 = 0}$$

qui a pour discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{2K}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2 > 0$$

et pour solutions

$$r_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{mv_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2K}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2}\right)$$

Comme un rayon de coordonnées polaires est par définition positif, seule la solution avec un signe + a un sens physique, d'où on déduit

$$\boxed{r_{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{2K}{mv_0^2}\right)^2 + 4b^2}\right) = \frac{K}{mv_0^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{bmv_0^2}{K}\right)^2}\right)}$$

6. En inversant la relation donnée, on trouve :

$$b = \frac{K}{mv_0^2\tan(D/2)} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 mv_0^2\tan(D/2)}$$

d'où $b_1 = 2,4.10^{14}$ m et $b_2 = 0$, ce qui donne alors $r_{\min 1} = 2,4.10^{-14}$ m et $r_{\min 2} = 2,7.10^{-14}$ m. On en déduit qu'un noyau d'or a une taille de l'ordre de 10^{-14} m (c'est un assez gros noyau), ce qui est bien plus petit que la taille de l'atome (10^{-10} m) connue par Rutherford.