

# Épreuve A - Physique

Durée : 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

---

Le sujet comporte 13 pages, et est composé de deux parties indépendantes.  
L'utilisation des calculatrices est interdite pour cette épreuve.

## AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

★ ★ ★

### Constantes utiles

- Masse volumique de l'air :  $\rho_a \approx 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Masse volumique de l'eau :  $\rho_e \approx 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Viscosité dynamique de l'air :  $\eta_a = 2 \times 10^{-5} \text{ USI}$
- Surface d'une sphère de rayon  $r$  :  $S = 4\pi r^2$

### Valeurs numériques approchées

$$10^{-1/2} \approx 0,32; \quad 10^{-3/2} \approx 0,032; \quad \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7,3 \times 10^{-5}; \quad \frac{0,9}{1,4} \approx 0,64.$$

# Première partie - Autour des gouttes de pluie

Extrait de Banque PT 2024

## I - Chute d'une gouttelette dans l'air

Un nuage est constitué d'une grande quantité de gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. Il se forme par condensation de la vapeur d'eau naturellement présente dans l'atmosphère lorsque les conditions météorologiques sont adéquates. Ces gouttelettes en suspension grossissent en se réunissant sous l'effet des courants atmosphériques jusqu'à atteindre une taille critique, au-delà de laquelle elles tombent sous forme de pluie. Dans cette partie, nous allons étudier la chute d'une gouttelette d'eau à l'aide de deux modélisations pour l'atmosphère : le cas d'une atmosphère sèche, puis le cas d'une atmosphère humide.

### A - Cas d'une atmosphère sèche

Dans un premier temps, on étudie la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique  $\rho_e$  et de rayon constant  $R = 0,2$  mm dans une atmosphère sèche, constituée d'air de masse volumique  $\rho_a$  et de viscosité dynamique  $\eta_a$ . On néglige tout phénomène d'évaporation au cours de cette chute. A l'instant  $t = 0$ , on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale. Elle est alors soumise à trois forces :

- son poids  $\vec{P}$ ;
- la poussée d'Archimède exercée par l'air  $\vec{P}_A = -\rho_a V_{\text{goutte}} \vec{g}$ , où  $V_{\text{goutte}}$  désigne le volume de la goutte d'eau sphérique;
- une force  $\vec{f}$  de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme

$$\vec{f} = -6\pi\eta_a R \vec{v}(t)$$

avec  $\vec{v}(t)$  le vecteur vitesse de la gouttelette et  $\eta_a$  la viscosité dynamique de l'air.

On définit l'axe  $(Oz)$  vertical descendant, comme représenté sur la figure 1.

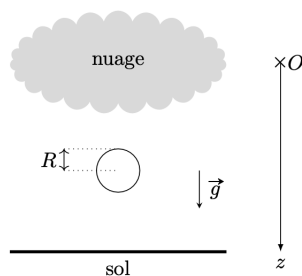


Figure 1: Chute d'une gouttelette d'eau de rayon constant  $R$  dans une atmosphère sèche

- Q1.** Déterminer l'unité SI de la viscosité dynamique.
- Q2.** Exprimer le poids et la poussée d'Archimède subies par la goutte en fonction des données de l'énoncé et du vecteur unitaire descendant  $\vec{e}_z$ .
- Q3.** Calculer numériquement le rapport, en norme, de la poussée d'Archimède sur le poids de la goutte, puis justifier qu'il est alors possible de négliger la poussée d'Archimède dans cette modélisation.

Dans la suite, on négligera la poussée d'Archimède.

- Q4.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante  $v(t)$  de la vitesse de la gouttelette projetée sur l'axe  $(Oz)$  vertical descendant.
- Q5.** A partir de cette équation différentielle, définir un temps caractéristique  $\tau$  en fonction de  $R$ ,  $\rho_e$  et  $\eta_a$ , puis calculer sa valeur numérique.
- Q6.** En déduire l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $g$ ,  $\tau$  et  $t$ .
- Q7.** Calculer numériquement la vitesse limite vers laquelle tend la gouttelette au cours de sa chute.

## B - Cas d'une atmosphère humide

On étudie maintenant la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique  $\rho_e$  dans une atmosphère humide, principalement constituée d'air de masse volumique  $\rho_a$  et de viscosité dynamique  $\eta_a$ . L'humidité du milieu fait croître le rayon  $r(t)$  de la gouttelette au cours de sa chute, et on note  $m(t)$  sa masse. A l'instant  $t = 0$ , on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale et avec un rayon initial  $r_0$ . On suppose que la poussée d'Archimède est toujours négligeable au cours de la chute. Les deux seules forces à prendre en compte sont ainsi :

- son poids  $\vec{P}$ ;
- une force  $\vec{f}$  de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme

$$\vec{f} = -6\pi\eta_a r(t) \vec{v}(t)$$

avec  $\vec{v}(t)$  le vecteur vitesse de la gouttelette.

On définit l'axe  $(Oz)$  vertical descendant, comme représenté sur la figure 2.

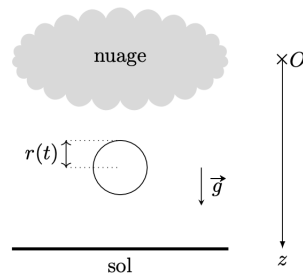


Figure 2: Chute d'une gouttelette d'eau de rayon variable  $r(t)$  dans une atmosphère humide

- Q8.** En supposant que la variation de volume de la gouttelette au cours du temps est proportionnelle à sa surface, justifier que son rayon peut alors s'exprimer sous la forme :

$$r(t) = r_0 + kt$$

avec  $k$  une constante caractéristique de l'humidité du milieu, que l'on ne cherchera pas à exprimer.

- Q9.** Montrer que  $\frac{dm}{dt}$  s'écrit :

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi\rho_e k (r_0 + kt)^2$$

Dans le cas d'un système de masse variable  $m(t)$ , on peut montrer que la deuxième loi de Newton reste valable dans un référentiel galiléen à condition de remplacer le terme  $\left\{ m \frac{d\vec{v}}{dt} \right\}$  par  $\left\{ \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right\}$ , ce qui donne en développant :

$$\left\{ m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \right\}.$$

**Q10.** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $v(t)$  de la gouttelette projetée sur l'axe  $(Oz)$  vertical descendant peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \left[ \frac{A}{r_0 + kt} + \frac{B}{(r_0 + kt)^2} \right] v(t) = g$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes que l'on exprimera en fonction de  $\rho_e$ ,  $\eta_a$  et  $k$ .

Quelques instants après le début de sa chute, le rayon de la gouttelette devient suffisamment important pour que le terme  $\frac{B}{(r_0 + kt)^2}$  de l'équation différentielle soit négligeable devant le terme en  $\frac{A}{r_0 + kt}$ .

**Q11.** En prenant en compte cette simplification, résoudre d'abord l'équation différentielle homogène (sans second membre), par séparation des variables.

**Q12.** Toujours dans le cadre de la simplification précédente, et en cherchant une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une fonction affine.

**Q13.** En déduire l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $g$ ,  $r_0$ ,  $k$  et  $t$ .

Lorsque le rayon de la gouttelette d'eau dépasse quelques millimètres, il n'est plus réaliste de considérer que la forme de celle-ci est encore sphérique. En effet, la traînée aérodynamique donne alors une forme de disque incurvé à la gouttelette d'eau, qu'il serait nécessaire de prendre en compte.

**Q14.** Grâce à votre culture scientifique, donner le nom de l'énergie par unité de surface qui est responsable de la forme sphérique des gouttelettes d'eau de petites tailles.

## II - Formation d'un arc-en-ciel

---

Lorsque le beau temps revient juste après une averse, on observe parfois la formation d'un arc-en-ciel à l'horizon. Il s'agit d'un phénomène optique de dispersion de la lumière solaire, qui se réfracte et se réfléchit dans des gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. La première théorie permettant d'expliquer ce phénomène a été établie par Descartes en 1647, à l'aide des lois de la réflexion et de la réfraction. Il mit en évidence qu'un observateur situé au niveau du sol reçoit un faisceau de rayons émergents correspondant au maximum de l'angle de déviation des gouttelettes d'eau. Comme celui-ci dépend de la longueur d'onde des rayons lumineux, on peut ainsi observer la dispersion de la lumière solaire. Dans cette partie, nous allons mettre en évidence les principaux résultats de cette théorie.

On considère un rayon lumineux monochromatique issu du soleil  $S$ , qui arrive sur une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air sous un angle d'incidence  $i_1$ , comme représenté sur la figure 3. Après une première réfraction, une réflexion et une seconde réfraction, le rayon émerge de la gouttelette sous un angle de réfraction  $i_4$ . Il se dirige alors vers un observateur  $O$  situé au niveau du sol. On suppose que l'air est un milieu d'indice optique égal à 1, et on note  $n$  l'indice optique de l'eau.

L'orientation des différents angles à chaque interface est définie sur la figure 3, et on définit positivement les angles orientés dans le sens trigonométrique.

**Q15.** Exprimer les angles de déviation  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  à chaque interface en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$  (en tenant compte de l'orientation de ces angles).

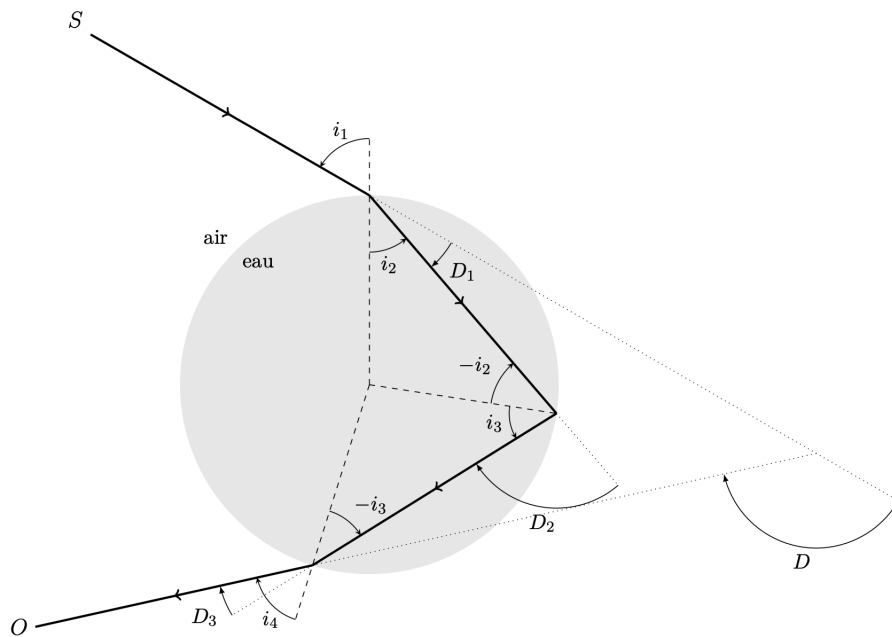


Figure 3: Trajet d'un rayon lumineux dans une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air

**Q16.** A l'aide des lois de Snell-Descartes, exprimer les angles  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$  en fonction de  $i_1$  et  $n$ .

**Q17.** En déduire que l'angle de déviation totale  $D$  peut s'exprimer :

$$D = 4 \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) - 2i_1 - \pi$$

On représente l'évolution de  $D$  en fonction de  $i_1$  sur la figure 4, en prenant  $n = 1,33$  pour l'indice optique de l'eau. L'angle de déviation présente un maximum  $D_{\max}$  pour un certain angle d'incidence  $i_{1,\max}$  qui correspond au faisceau de rayons émergents reçu par l'observateur.

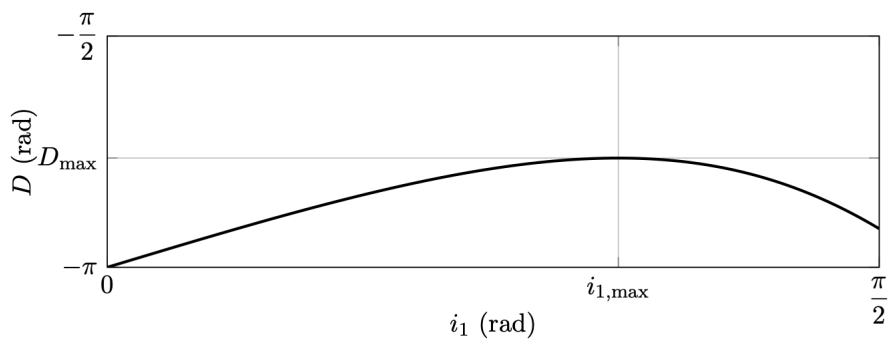


Figure 4: Évolution de l'angle de déviation  $D$  en fonction de l'angle d'incidence  $i_1$

On rappelle que la dérivée de la fonction trigonométrique  $f(x) = \arcsin(x)$  s'exprime :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Q18.** Montrer que l'angle d'incidence  $i_{1,\max}$  vérifie l'équation suivante :

$$\sin i_{1,\max} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

**Q19.** En déduire l'expression du maximum  $D_{\max}$  en fonction de  $n$ .

On représente l'évolution de  $D_{\max}$  en fonction de  $n$  sur la figure 5, pour  $1 \leq n \leq 2$ .

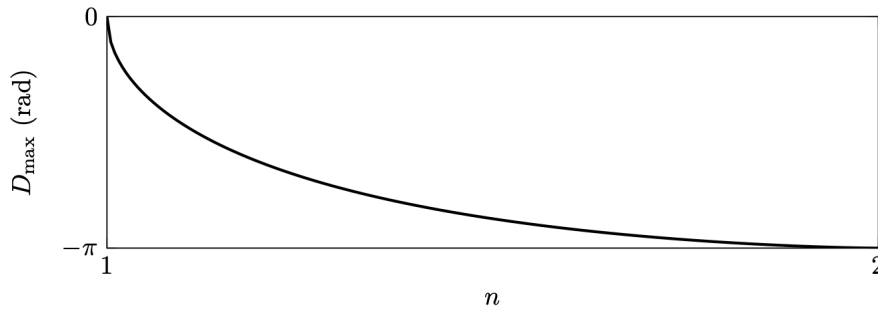


Figure 5: Évolution du maximum  $D_{\max}$  en fonction de l'indice optique  $n$

L'eau étant un milieu dispersif, son indice optique dépend de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayon lumineux considéré. En 1836, Cauchy établit que l'indice optique d'un tel milieu peut s'exprimer sous la forme

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes positives caractéristiques du milieu.

- Q20.** Comment évolue le maximum  $D_{\max}$  lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  augmente ? Justifier votre raisonnement.
- Q21.** Rappeler l'intervalle de longueur d'onde constituant le spectre visible.
- Q22.** Lorsque l'observateur  $O$  situé au niveau du sol regarde l'arc-en-ciel, aperçoit-il l'anneau rouge situé au-dessus ou en-dessous de l'anneau violet ? Justifier votre raisonnement.

Lorsque les conditions d'observation sont excellentes, il est possible d'apercevoir un second arc-en-ciel, situé au dessus de l'arc-en-ciel précédemment étudié. Il est même possible d'observer, dans de très rares occasions, un troisième arc-en-ciel qui s'ajoute aux deux précédents.

- Q23.** En considérant toujours des gouttelettes d'eau sphériques en suspension dans l'air, expliquer l'origine de ces différents arcs-en-ciel.

**- Fin de la première partie -**

# Seconde partie - Isolation thermique et acoustique

Extrait du concours EPITA 2022

## I - Double vitrage et isolation acoustique

Cette partie s'intéresse à l'isolation acoustique d'un double vitrage, notamment en la comparant à celle d'un simple vitrage.

### A - Présentation de l'isolation acoustique du simple vitrage

Sur la figure 6, la courbe en trait tireté représente l'atténuation acoustique d'un simple vitrage en fonction de la fréquence de l'onde sonore incidente. La fréquence  $f \approx 3000$  Hz, autour de laquelle on constate une baisse d'atténuation, est appelée fréquence critique de la vitre. On peut en obtenir une expression à l'aide d'une analyse de mécanique des fluides, qui ne sera pas faite ici.

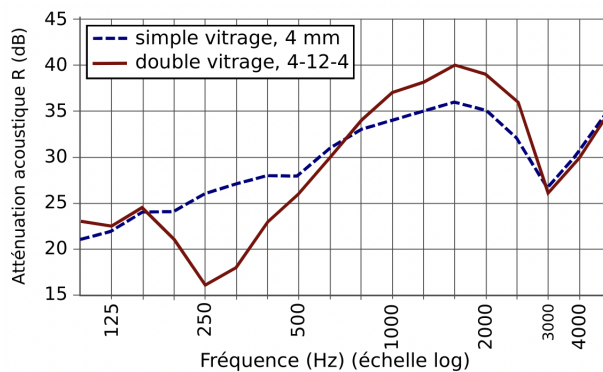


Figure 6: Atténuation par un simple vitrage (vitre de 4 mm) et un double vitrage (vitre de 4mm, vide de 12mm, vitre de 4mm). L'échelle verticale est en décibels, mais il n'est pas nécessaire d'en connaître la définition : simplement, plus l'atténuation est importante, plus l'onde sonore transmise est d'amplitude faible.

Q24. Rappeler la gamme de fréquences audibles par l'être humain.

### B - Double vitrage : étude en régime forcé

La figure 6 montre également la courbe d'atténuation acoustique du double vitrage (en trait plein). Elle présente deux baisses d'atténuation : une vers 250 Hz et une vers 3000 Hz.

Q25. Comment s'explique la baisse d'atténuation vers 3000 Hz ?

La présence de la baisse d'atténuation vers 250 Hz, absente pour le simple vitrage, montre que le double vitrage est globalement moins performant que le simple vitrage. Nous allons étudier l'origine de cette baisse.

Pour cela, on modélise le double vitrage comme deux masses  $m_1$  et  $m_2$  qui représentent chacun une vitre. La lame d'air qui sépare les deux vitres est modélisée par un ressort (pour son rôle élastique de transmission des vibrations), associée à un amortisseur visqueux (pour rendre compte de la dissipation).

- Le ressort possède une longueur à vide  $l_0$  et une constante de raideur  $k$ .
- L'amortisseur exerce sur la masse 2 une force  $\vec{f} = -\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\vec{e}_x$  avec  $\alpha$  une constante et  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$  les vitesses des masses
- Une onde sonore incidente force la vitre 1 à osciller selon  $x_1(t) = A \cos(\omega t)$

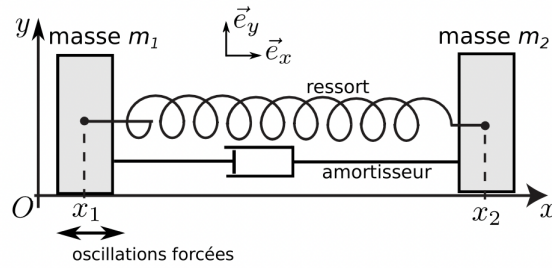


Figure 7: Modélisation mécanique du double vitrage

- Q26.** Donner l'expression de la force  $\vec{F}$  qu'exerce le ressort sur la masse 2, en fonction de  $l_0$ ,  $k$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et du vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ .
- Q27.** Établir l'équation différentielle suivie par la position  $x_2(t)$  de la masse 2.
- Q28.** On pose  $u_2(t) = x_2(t) - l_0$ . En partant de la question précédente, montrer que  $u_2(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 \quad (1)$$

avec  $\omega_0$  et  $Q$  des paramètres dont on donnera les expressions en fonction de  $m_2$ ,  $k$  et  $\alpha$ .

Dans la suite, on travaille à partir de l'équation (1). On utilise le formalisme complexe, où une grandeur du type  $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$  est représentée par la grandeur complexe  $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$  avec  $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$  l'amplitude complexe associée, où  $j^2 = -1$ .

On voit l'ensemble du double vitrage comme un filtre de fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{u}_2}{\underline{x}_1}$ .

- Q29.** Donner l'expression de  $\underline{H}$ , notamment en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

- Q30.** Donner l'expression du gain  $G = |\underline{H}|$  du filtre.

On introduit la pulsation réduite  $x = \omega/\omega_0$ . Le graphique 8 montre l'évolution de  $|\underline{H}|$  en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $Q$ .

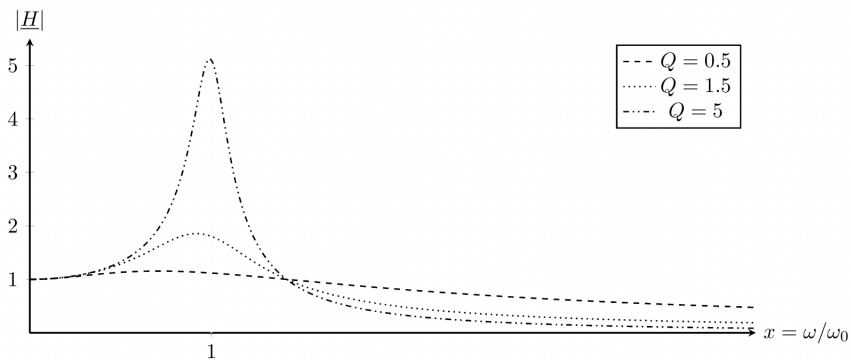


Figure 8: Évolution du gain en fonction de  $Q$

- Q31.** Comment s'appelle le phénomène qui se manifeste ici par un maximum marqué sur la courbe de gain ?



On souhaite obtenir la position du maximum de la courbe  $|\underline{H}|(x)$ . Pour les valeurs élevées de  $Q$  qui nous concernent ici, le numérateur de  $|\underline{H}|$  ne varie pas beaucoup autour du maximum. Le maximum est donc atteint lorsque le dénominateur est minimal. On admet que ce dénominateur s'écrit  $D(x) = \sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2}$ .

- Q32.** Établir, en suivant la démarche décrite ici, la position  $x$  du maximum de  $|\underline{H}|(x)$  en fonction de  $Q$ . Indiquer également à quelle condition sur  $Q$  ce maximum existe.
- Q33.** Montrer que si  $Q$  est assez grand (de l'ordre de 10 par exemple), alors la position de ce maximum correspond à  $\omega \simeq \omega_0$ .

Les questions qui précèdent expliquent la présence de la baisse d'atténuation du double vitrage à basses fréquences : pour ces fréquences, l'ensemble vitre - air - vitre entre en résonance et laisse passer l'onde sonore. Nous avons montré que la pulsation de résonance est donnée (quasiment) par la pulsation propre du système.

Notre expression de  $\omega_0$  n'est toutefois pas correcte, car elle ne prend en compte que la masse de la seconde vitre. Or, celle de la première doit aussi intervenir, car sa mise en mouvement par l'onde sonore incidente en dépend. Pour obtenir la bonne expression, il faut déterminer la pulsation des oscillations d'un système masse 1 - ressort - masse 2 en oscillations libres. On considère donc un tel système.

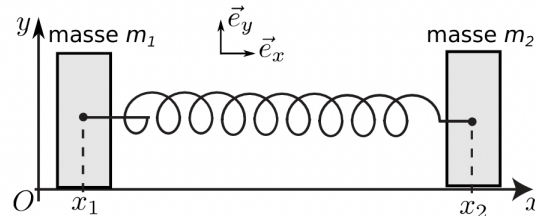


Figure 9: Modélisation du double vitrage pour l'étude des oscillations libres

On note  $l = x_2 - x_1$  la longueur du ressort et  $l_0$  sa longueur à vide. Il est initialement comprimé d'une quantité  $\delta$  :  $l(t = 0) = l_0 - \delta$ , puis il est relâché sans vitesse initiale à  $t = 0$ . On néglige ici toute force de frottement et on ne considère que l'action du ressort, du poids et de la réaction normale du support sur les masses.

- Q34.** Établir l'équation différentielle suivie par la position  $x_1(t)$  de la masse  $m_1$ , puis celle suivie par la position  $x_2(t)$  de la masse 2.
- Q35.** En déduire une équation différentielle portant sur la longueur  $l(t)$ .
- Q36.** En déduire l'expression de la pulsation  $\omega_0$  des oscillations en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$  et  $k$ .
- Q37.** Établir la solution  $l(t)$  de cette équation différentielle.

C'est cette pulsation qui correspond à la résonance d'un double vitrage. On trouve en effet dans les guides acoustiques la formule suivante pour la fréquence de résonance  $f_r$  :

$$f_r = 84 \times \sqrt{\frac{1}{d} \left( \frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2} \right)}$$

avec  $d$  la distance entre les vitres en mètres (dont dépend la raideur du ressort équivalent), et  $m'_1$   $m'_2$  les masses surfaciques des vitrages en  $\text{kg/m}^2$ .

- Q38.** Si on souhaite envoyer le pic de résonance vers les basses fréquences hors du domaine de l'audible, que faut-il faire concernant les masses des vitres ?

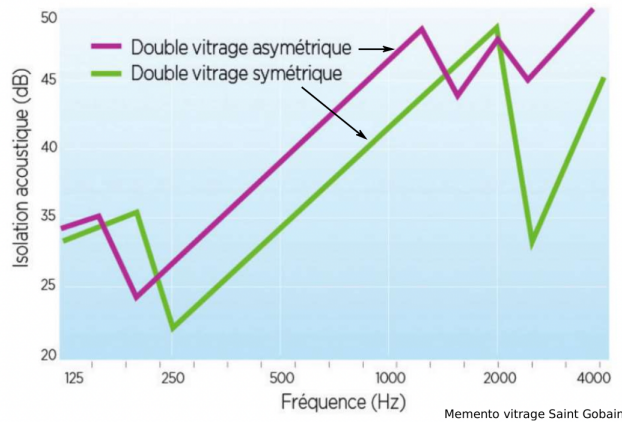


Figure 10: Atténuation d'un double vitrage asymétrique

Revenons sur le problème du creux d'atténuation vers  $f \approx 3000$  Hz. Cette fréquence critique est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la vitre. La courbe 10 représente schématiquement l'atténuation d'un double vitrage asymétrique (vitres de 4 et 8 mm).

**Q39.** Expliquer pourquoi les creux d'atténuation liés aux fréquences critiques sont plus faibles.

## II - Comportement thermique d'une habitation

Cette partie s'intéresse à l'isolation thermique d'une maison. On décrit l'habitation en la décomposant en trois systèmes : le milieu extérieur, l'intérieur et les murs.

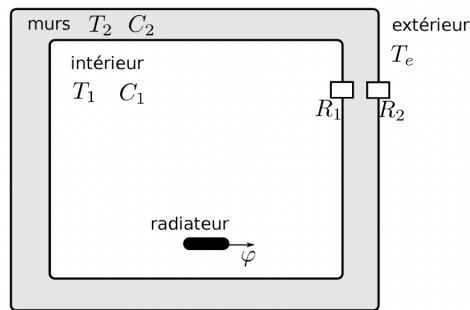


Figure 11: Modélisation thermique d'une habitation

- L'intérieur est de l'air de capacité thermique à pression constante  $C_1$  et de température  $T_1(t)$ .
- Les murs sont de capacité thermique  $C_2$  et de température  $T_2(t)$ .
- Le milieu extérieur agit comme un thermostat à la température  $T_e$ .
- On note  $R_1$  la résistance thermique de l'ensemble de l'isolant placé à l'intérieur de la maison, contre les murs. L'intérieur cède donc une puissance thermique  $(T_1 - T_2)/R_1$  vers les murs.
- On note  $R_2$  la résistance thermique de l'ensemble de l'isolant placé à l'extérieur de la maison, contre les murs. Les murs cèdent donc une puissance thermique  $(T_2 - T_e)/R_2$  vers l'extérieur.
- Le chauffage apporte une puissance thermique  $\varphi$  constante à l'extérieur.

Toutes les évolutions sont isobares, les solides et les liquides sont supposés incompressibles et indilatables et les gaz supposés parfaits. On étudie l'évolution des températures  $T_1$  et  $T_2$ , et on admet qu'elles sont régies par les équations (2) et (3) données ci-dessous :

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} - \frac{T_2 - T_e}{R_2} \quad (2)$$

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \varphi - \frac{T_1 - T_2}{R_1} \quad (3)$$

### A - Étude du refroidissement lorsque le chauffage est coupé

**Uniquement dans les trois questions suivantes**, on suppose le chauffage coupé. De plus, la maison est uniquement isolée par l'intérieur ( $R_2 = 0$  et  $\forall t, T_2 = T_e$ ). Ainsi, le problème se ramène à l'équation (3) avec  $\varphi = 0$  et  $T_2 = T_e = \text{constante}$ . La température  $T_1$  à l'instant  $t = 0$  est notée  $T_{10}$ .

- Q40.** En déduire l'expression de  $T_1(t)$ . On introduira un temps caractéristique  $\tau$  dont on donnera l'expression.
- Q41.** Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en  $t/\tau$  pour  $t \ll \tau$  de l'expression de  $T_1(t)$  ci-dessus obtenue. Montrer que  $T_1(t)$  est une fonction affine et donner l'expression de sa pente  $a$  en fonction de  $T_{10}, T_e$  et  $\tau$ .
- Q42.** L'enregistrement ci-dessous a été réalisé dans une habitation. Le chauffage est coupé à l'instant initial. On a  $T_e = 0^\circ\text{C}$  et  $T_{10} = 20,9^\circ\text{C}$ . En déduire une estimation de la grandeur  $R_1 C_1$  (attention à son unité). Cette grandeur est caractéristique de l'inertie thermique de l'habitation.

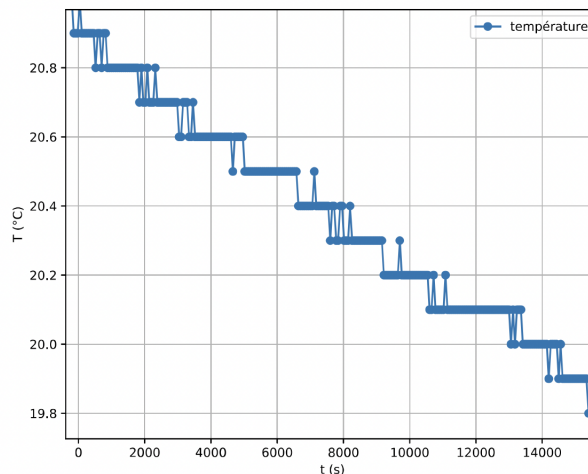


Figure 12: Évolution de la température dans une habitation

### B - Étude en régime stationnaire

On étudie cette fois le comportement en régime stationnaire (toutes les températures sont constantes). Le chauffage est donc allumé, et on attend suffisamment longtemps pour que  $T_1$  et  $T_2$  se stabilisent.  $T_e = 0^\circ\text{C}$  est également constante. On pourra partir des équation (2) et (3).

- Q43.** Exprimer les températures  $T_1$  et  $T_2$  en fonction de  $R_1, R_2, \varphi$  et  $T_e$ .
- Q44.** Dans le cas d'une isolation par l'intérieur, il n'y a pas d'isolant à l'extérieur des murs ( $R_2 = 0$ ). En étudiant les relevés de consommation électrique sur un mois d'hiver, on constate qu'il faut en moyenne fournir une puissance thermique  $\varphi = 1,0 \text{ kW}$  pour maintenir  $T_1 = 20^\circ\text{C}$  alors que  $T_e = 0^\circ\text{C}$ . En déduire une estimation de  $R_1$ .

## C - Étude en régime sinusoïdal forcé

Des deux études précédentes on retiendra  $C_1 = 2 \times 10^7 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$  (tient compte de l'air intérieur, du mobilier, des dalles),  $C_2 \simeq 10C_1$  typiquement pour les murs en parpaing. Les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  dépendent du type d'isolation :  $R_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ K}\cdot\text{W}^{-1}$  et  $R_2 = 0$  si l'isolation est à l'intérieur des murs, et l'inverse si l'isolation est à l'extérieur des murs.

On étudie maintenant l'évolution des températures suite à l'alternance jour-nuit. La température extérieure n'est plus constante et varie avec une période de 24h selon  $T_e(t) = T_{e,\text{moyen}} + \Delta T_0 \cos(\omega t)$ .

**Q45.** Donner la valeur numérique de la pulsation  $\omega$ .

Les questions qui précèdent suggèrent une analogie électrique. On admet que le problème thermique étudié est mathématiquement équivalent à l'étude du circuit électrique ci-dessous, où :

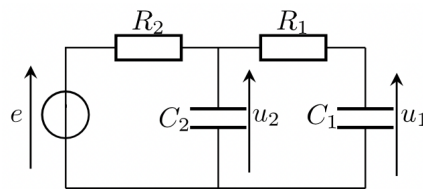


Figure 13: Équivalence électrique du problème thermique

- le générateur  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$  représente  $T_e(t) - T_{e,\text{moyen}} = \Delta T_0 \cos(\omega t)$
- la tension  $u_1(t)$  représente la différence entre  $T_1(t)$  et sa valeur en régime stationnaire
- la tension  $u_2(t)$  représente la différence entre  $T_2(t)$  et sa valeur en régime stationnaire

La capacité  $C_1$  représente l'intérieur de la maison, qui se "charge" et se "décharge" à mesure que son énergie interne augmente et diminue. De même pour  $C_2$  qui représente les murs. On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$ . La tension  $u_1(t) = U_{10} \cos(\omega t + \varphi)$  est représentée par  $\underline{u}_1(t) = U_{10} e^{j(\omega t + \varphi)}$  où  $j^2 = -1$ .

- Q46.** On note  $\underline{Z}_{\text{éq}}$  l'impédance équivalente à l'ensemble  $C_2$ ,  $R_1$  et  $C_1$ . Donner son expression en fonction de  $\omega$ ,  $C_2$ ,  $R_1$  et  $C_1$ .
- Q47.** Lorsqu'on considère une impédance  $\underline{Z}_1$  et une impédance  $\underline{Z}_2$  en dérivation, et que  $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$ , quelle approximation sur l'impédance équivalente à l'ensemble peut-on faire ? On attend une justification.
- Q48.** Pour la suite, comme  $C_2 \gg C_1$ , on admet que  $\underline{Z}_{\text{éq}} \approx \frac{1}{jC_2\omega}$ .

En utilisant cette approximation, montrer que  $\underline{H} = \underline{u}_1 / \underline{e}$  peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  des pulsations à exprimer en fonction des capacités et résistances.

- Q49.** Donner l'expression du gain en décibels de ce filtre en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .
- Q50.** Donner la pente des asymptotes haute et basse fréquence du diagramme de Bode en amplitude.
- Q51.** Donner l'expression du déphasage entre  $u_1(t)$  et  $e(t)$ . Donner sa valeur pour  $\omega$  petit et pour  $\omega$  grand.

On obtient les valeurs numériques suivantes :

- Cas d'une isolation par l'intérieur :  $\omega_1 = 2,5 \times 10^{-6}$  rad/s et  $\omega_2 = +\infty$ .
- Cas d'une isolation par l'extérieur :  $\omega_1 = +\infty$  et  $\omega_2 = 2,5 \times 10^{-7}$  rad/s

Les deux diagrammes de Bode en amplitude, l'un correspondant à l'isolation par l'intérieur et l'autre par l'isolation à l'extérieur sont tracés figure 14.

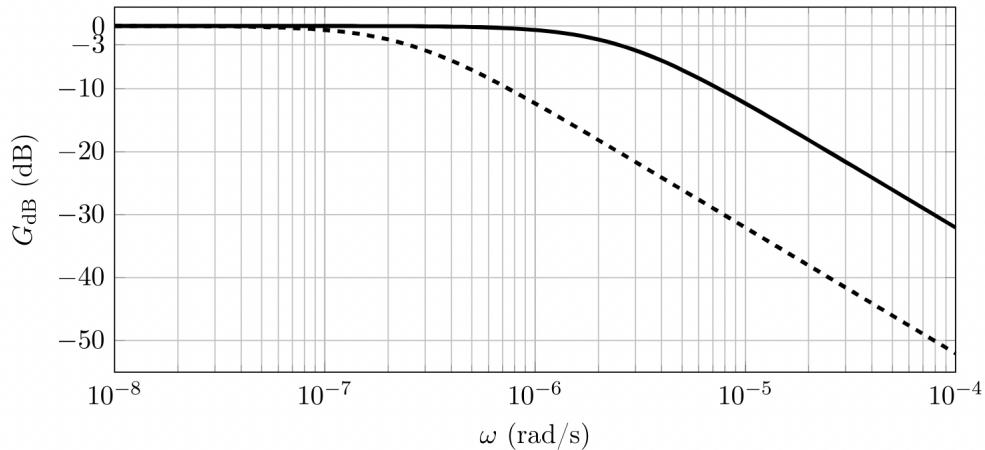


Figure 14: Diagrammes de Bode pour l'équivalent électrique

- Q52.** Laquelle de ces courbes correspond à l'isolation par l'intérieur ? Et pour l'isolation à l'extérieur ?
- Q53.** On suppose une amplitude  $\Delta T_0 = 10$  °C pour la variation de température extérieure, ce qui dans notre analogie électrique se traduit par une amplitude  $E_0 = 10$  V pour le signal  $e(t)$ .  
On considère le cas d'une isolation par l'intérieur. En vous aidant du diagramme de Bode, et en arrondissant à la dizaine la plus proche la valeur de  $G_{dB}$ , donner la valeur de l'amplitude  $U_{10}$  de  $u_1(t)$ .
- Q54.** Faire de même pour le cas d'une isolation par l'extérieur, et conclure sur l'avantage de celle-ci.
- Q55.** Dans les deux cas, l'argument de la fonction de transfert vaut environ  $-\pi/2$  pour la pulsation considérée ici.  $u_1(t)$  est-il en avance ou en retard par rapport à  $e(t)$  ? De quelle fraction de période ? Traduire ceci en heures.

- Fin de l'épreuve -