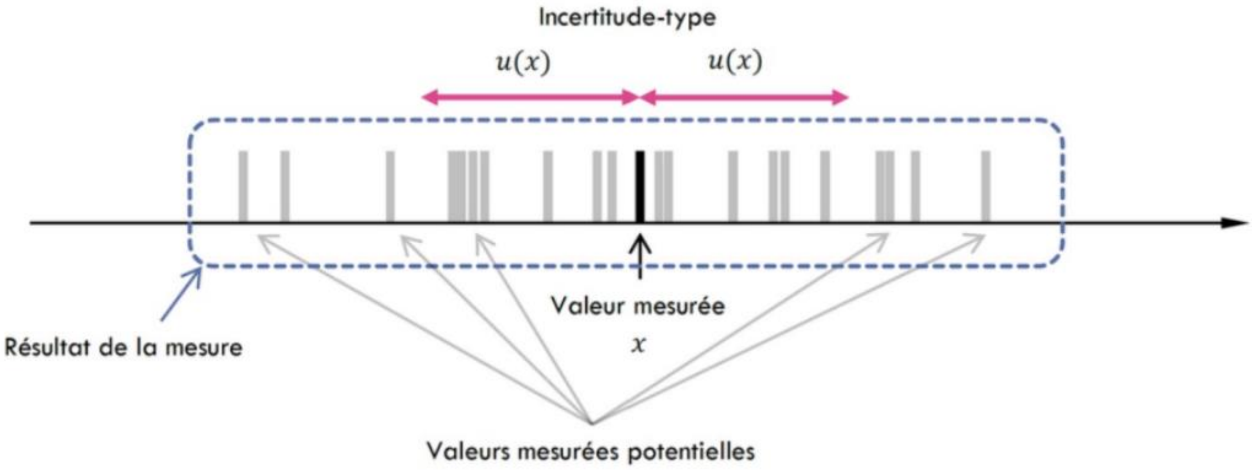
Incertitudes en physique expérimentale

I. Mesures et incertitudes

1. Variabilité de la mesure

En physique et en chimie, comme dans toutes les sciences expérimentales, on appelle **mesure l'ensemble des opérations qui permettent d'attribuer une valeur x à une grandeur physique X**. Cette valeur est un nombre souvent associé à une unité.

La valeur obtenue par une mesure est incertaine. Il existe de nombreuses sources d'incertitudes qui sont liées à la méthode de mesure, aux instruments de mesure, à l'environnement, à la personne qui réalise les mesures.



Le résultat d'une mesure n'est pas une valeur unique mais un ensemble de valeurs numériques raisonnablement attribuables à la grandeur d'intérêt.

Le résultat de la mesure doit contenir deux informations :

x = ... unité ; u(x) = ... unité

La valeur x est une valeur particulière de cet ensemble, déterminée soit à partir d'une mesure unique (*Exemple : mesure d'une tension électrique avec Voltmètre*), soit à partir d'une série de mesure (*Exemple : résultat de la moyenne d'une série de mesure de la période d'oscillation d'un pendule*).

La valeur de u(x) appelé « incertitude » est une indication de la dispersion du résultat.

Elle est déterminée soit par une estimation du plus petit intervalle dans lequel peut trouver la valeur de la grandeur à mesurer on parle **d'incertitude de type B** (*Exemple : incertitude fourni dans la notice constructeur sur la mesure d'une tension avec un Voltmètre*).

Soit à partir d'une étude statistique sur la série de mesure, on parle alors **d'incertitude de type A** (*Exemple : résultat de la écart type d'une série de mesure de la période d'oscillation d'un pendule*).

On retiendra qu'un résultat de mesure s'écrit toujours sous la forme : $\boxed{X = x \pm u(x)}$

2. Chiffres significatifs

Le GUM (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*) recommande **2 chiffres significatifs pour l'incertitude-type.**

Le dernier chiffre significatif de l'incertitude-type impose le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée.

Exemples : $\ell = (10,000 \pm 0,029)$ cm ou $\ell = (10,0 \pm 1,2)$ cm

3. Comparaison d'une mesure avec une valeur de référence

En TP, on est souvent amené à comparer le résultat d'une mesure à une valeur de référence (*Exemple : détermination de la célérité de la lumière en mesurant la distance entre les zones fondues d'une tablette de chocolat après passage au micro-onde*). Pour conclure, on utilise le z-score :

$$\boxed{z = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}}$$

→ Par convention, **si z < 2**, la mesure est compatible avec la valeur de référence.
→ **Si z > 2** alors la mesure n'est pas compatibles avec la valeur de référence.

Une incompatibilité n'est pas synonyme d'échec. Néanmoins il convient de s'interroger sur le processus ayant conduit au résultat. A-t-on fait une erreur de mesure ? de calcul ? a-t-on oublié une source d'incertitude ?

II. Estimer une incertitude sur une grandeur mesurée

1. Incertitude de type A

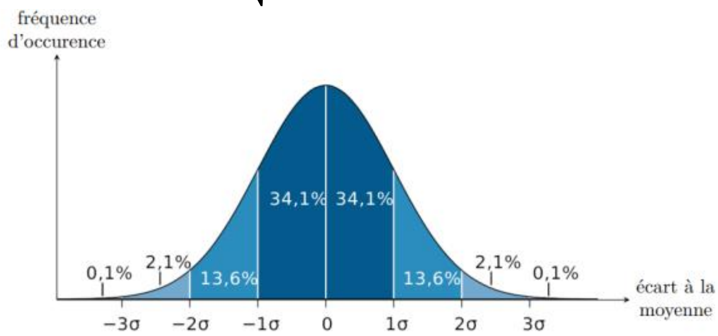
A partir d'une série de *n* mesures $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$, on détermine :

a) **La valeur moyenne** : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} x_i$

→ *La valeur moyenne est la meilleure estimation disponible de la grandeur x*

b) **L'écart-type expérimental** de la série :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i - \bar{x})^2}$$



→*Dans la limite d'un nombre infini de mesures, et en supposant qu'elles suivent une loi de probabilité gaussienne (aussi appelée loi normale), on peut montrer que **68 %** des valeurs se trouvent dans l'intervalle : **[$\bar{x} - \sigma_x$, $\bar{x} + \sigma_x$].***

L'incertitude-type de la moyenne est donné par :

$$\boxed{u(\bar{x}) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

2. Incertitude de type B

Il arrive que toutes les mesures répétées donnent le même résultat, **car la résolution (ou précision) de l'appareil de mesure cache la variabilité des mesures.**

Dans ce cas on procède à **une évaluation de type B en déterminant le plus petit intervalle dans lequel peut se trouver la valeur de la grandeur à mesurer.**

Les critères retenus pour cette estimation sont subjectifs et doivent toujours être précisés.

On suppose que toutes les valeurs que l'on pourrait mesurer sont uniformément distribuées dans l'intervalle : $[x - \epsilon_x, x + \epsilon_x]$.

L'incertitude-type est alors donnée par :

$$\boxed{u(\bar{x}) = \frac{\varepsilon_x}{\sqrt{3}}}$$

III. Estimer une incertitude sur une grandeur calculée

1. Par la formule de composition des incertitudes

Nous serons souvent amenés à effectuer des **mesures indirectes**, c'est-à-dire à calculer la valeur d'une grandeur physique à partir de la mesure de plusieurs autres grandeurs physiques.

Les incertitudes sur les grandeurs mesurées se propagent sur la grandeur calculée selon les règles explicitées dans le tableau ci-dessous. (*Il existe une formule générale que l'on verra plus tard dans l'année*)

Multiplication par une constante	$x = \lambda \times y \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$u(x) = \lvert\lambda\rvert \times u(y)$
Somme ou différence	$x = y + z$ ou $x = y - z$	$u(x) = \sqrt{u(y)^2 + u(z)^2}$
Produit ou quotient	$x = y \times z$ ou $x = \frac{y}{z}$	$\frac{u(x)}{x} = \sqrt{\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}$
Puissances et racines	$x = y^p \quad (p \in \mathbb{R})$	$\frac{u(x)}{x} = \lvert p\rvert \times \frac{u(y)}{y}$

2. Par une simulation de Monte-Carlo

Pour remplacer les calculs de composition fastidieux si les relations entre grandeurs ne sont pas linéaires, nous préfèrerons utiliser la **simulation Monte-Carlo** pour déterminer $u(z)$.

Le principe de la méthode pour déterminer l'incertitude sur la grandeur z=f(x,y) connaissant les incertitudes u(x) et u(y) est le suivant :

1. Mesurer x et y, et en déduire la valeur de $z(x, y)$ en appliquant la formule.
2. Evaluer les demi-largeurs ϵ_x et ϵ_y des intervalles dans lesquels les mesures de x et de y se trouvent surement.
3. Réaliser N simulations par tirage aléatoire uniformément reparties dans les intervalles précédents.
4. Déterminer la valeur de z pour chacune des N simulations.
5. L'incertitude-type sur **l'unique valeur calculée** de z est l´écart-type des N valeurs simulées de z.