Exercices d'application

□ Exercice 4.1. équivalence entre les unités

1. Le newton est l'unité d'une force. On a vu dans le cours que $\dim(\|\overrightarrow{F}\|) = M.L.T^{-2}$ donc :

$kg.m.s^{-2}$ ✗ $kg.m.s^{-1}$ ❑ $kg.s^{-2}$ ❑ $kg.m.s^{-1}$ ❑

2. Le joule est l'unité d'une énergie. On a vu dans le cours que $\dim(\mathcal{E}) = M.L^2.T^{-2}$, donc :

$kg.m.s^{-1}$ ❑ $kg.m^2.s^{-1}$ ❑ $kg.m^2.s^{-2}$ ✗ $kg.m.s^{-2}$ ❑

3. Réorganisons l'expression précédente : $G = \dfrac{Fd^2}{m_A m_B}$.

Ainsi $\dim(G) = \dfrac{\dim(F) \times \dim(d^2)}{\dim(m_A) \times \dim(m_B)} = \dfrac{M.L.T^{-2} \times L^2}{M^2} = M^{-1}.L^3.T^{-2}$. Donc :

$kg^{-1}.m^2.s^{-1}$ ❑ $kg^{-1}.m^3.s^{-1}$ ❑ $kg^{-1}.m^2.s^{-2}$ ❑ $kg^{-1}.m^3.s^{-2}$ ✗

4. Réorganisons l'expression précédente : $c = \dfrac{Q}{m\Delta T}$.

Ainsi $\dim(c) = \dfrac{\dim(Q)}{\dim(m) \times \dim(\Delta T)} = \dfrac{M.L^2.T^{-2}}{M.\Theta} = L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$. Donc :

$m^2.s^{-2}.K^{-1}$ ✗ $kg.m^2.s^{-2}.K^{-1}$ ❑ $m^2.s^{-1}.K^{-1}$ ❑ $kg.m^2.s^{-1}.K^{-1}$ ❑

□ Exercice 4.2. Vérification d'homogénéité

1 –

$$[z] = \mathrm{L} \quad ; \quad \left[gt^2\right] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2} \times \mathrm{T}^2 = \mathrm{L} \quad ; \quad [\alpha] = 1 \quad \Rightarrow \quad [\sin\alpha] = 1$$

$$\Rightarrow \quad [v_0 \sin\alpha t] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1} \times 1 \times \mathrm{T} = \mathrm{L} \quad ; \quad \left[h^2\right] = [h]^2 = \mathrm{L}^2$$

donc la somme ne marche pas.

2 – La pression est une force surfacique, et

$$[P] = (\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2})\cdot\mathrm{L}^{-2} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-2}$$

Par ailleurs

$$[\rho g z] = (\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3})\cdot(\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2})\cdot\mathrm{L} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-2}$$

On peut donc bien sommer P et $\rho g z$, donc **la formule est homogène**.

3 – On sait que $[v] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$, et que $\left[1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right]$ est sans dimension. On considère donc

$$\left[\sqrt{\frac{p}{\rho\left(1-\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right)}}\right] = \left[\sqrt{\frac{p}{\rho}}\right] = \left((\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-2})\cdot(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3})^{-1}\right)^{1/2} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$$

ce qui est bien une vitesse : **la formule est homogène**.

4 – $1/2mv^2$ est une énergie ; or une puissance est une énergie divisée par un temps. Puisque

$$\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[\mathcal{E}]}{[t]}$$

l'expression dérivée est homogène à une puissance ; en conséquence

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)d$$

n'est plus homogène à une puissance, donc **la formule n'est pas homogène**.

5 – Puisque V a la même dimension au numérateur et au dénominateur, le membre de gauche à la même dimension que $1/p$, donc que $1/p_0$: **cette expression est homogène**.

5 – i et i_0 sont homogènes, et l'exponentielle est sans dimension, donc cet aspect convient ; en revanche, l'argument de l'exponentielle $-t/\tau^2$ est homogène à l'inverse d'un temps (donc à une fréquence), ce qui est interdit puisque ce rapport est utilisé en argument d'une fonction transcendante (ici exponentielle). **Cette formule est donc inhomogène**.

7 – On vérifie d'abord les arguments des fonctions transcendantes :

- $t + \tau$ est un temps, donc $\nu(t + \tau)$ est sans dimension et $2\pi\nu(t + \tau)$ aussi : $p_1 \sin(2\pi\nu(t+\tau))$ existe et est homogène à une pression
- t/τ et $\nu\tau$ sont sans dimension, donc $(t/\tau)/(1+\nu\tau)$ aussi : $\tan[(t/\tau)/(1+\nu\tau)]$ existe et est sans dimension

Il faut maintenant vérifier que mg/S est homogène à une pression ; or mg est homogène à une force, et une pression est une force surfacique, donc mg/S est bien homogène à une pression. Finalement,

$$\frac{mg}{S}\tan\frac{t/\tau}{1+\nu\tau}$$

est bien homogène à une pression, donc on somme deux pressions et on dit que la somme est égale à une pression : **cette expression est bien homogène**.

□ Exercice 4.3. Conversions d'unités.

1 – $\Delta t = \Delta x/v$ soit 5,9 s pour le tonnerre et 6,7 m pour l'éclair. On en déduit que l'éclair est vu presque instantanément.

2 – $d = 2{,}51\cdot 10^{17}$ m.

□ Exercice 4.4. Application numérique.

1 –

$$\mathcal{E} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\times(1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^4}{8\times(8{,}9\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1})^2\times(6{,}6\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s})^2} = \frac{9,1\times 1,6^4}{8\times 8,9^2\times 6,6^2}\times 10^{-15}\,\mathrm{J}$$

$$= 2{,}2\cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}6\,\mathrm{eV}$$

2 – on commence par la parenthèse avec la somme :

$$\frac{t}{\tau} = \frac{1{,}71\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}}{2{,}25\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}} = \frac{1,71}{2,25}\cdot 10^{-1} = 7{,}6\cdot 10^{-2} \Rightarrow 1 - \mathrm{e}^{-t/\tau} = 7{,}318\cdot 10^{-2}$$

Et on finit avec le produit :

$$v = \frac{14\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\times 9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{7{,}2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}}\times 7{,}318\cdot 10^{-2} =$$

$$\frac{14\times 9,81\times 7,318}{7,2}\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 1{,}396\cdot 10^1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\underline{v = 14\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

Exercices d'entrainement

□ Exercice 4.5. Déterminer la dimension d'une grandeur inconnue

1 – Puisque a et b sont des longueurs, $[a^3b^{1/2}] = \mathrm{L}^{7/2}$ et $[(a+b)^{-3/2}] = \mathrm{L}^{-3/2}$, d'où finalement

$$[X] = \mathrm{L}^{7/2-3/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{[X] = \mathrm{L}^2}$$

<u>X a donc la dimension d'une surface</u>.

2 – R_x est une force, donc $[R_x] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$, et ρ est une masse volumique, donc $[\rho] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}$; on en déduit

$$[C_x] = \frac{\mathrm{M.L.T}^{-2}}{\mathrm{L}^2.\mathrm{M.L}^{-3}.(\mathrm{L.T}^{-1})^2} = 1$$

<u>Donc le C_x est sans dimension, et donc sans unité</u>.

3 – Commençons par vérifier que l'exponentielle a bien un argument sans dimension : cela implique $[\lambda t] = 1$, soit $[\lambda]\mathrm{T} = 1$, d'où

$$\boxed{[\lambda] = \mathrm{T}^{-1}, \text{ son unité est la seconde (s)}}$$

L'exponentielle étant une fonction mathématique transcendante, $[d] = [de^{-\lambda t}]$. Par ailleurs, b et $de^{-\lambda t}$ sont sommés entre eux, ils ont donc la même dimension ; on peut donc écrire $[b - de^{-\lambda t}] = [b] = [d]$ et

$$[\mathscr{E}] = [a]\,[b] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2} = (\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2})\,[\mathrm{b}] \quad \Rightarrow$$
$$\boxed{[b] = [d] = \mathrm{L}, \text{ leur unité est le mètre (m)}}$$

On pouvait s'en apercevoir par le fai qu'une énergie est homogène à une force que multiplie une longueur.

4 – La pression P est une force surfacique, donc $[P] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}/\mathrm{L}^2$, donc le facteur PV a pour dimension

$$[PV] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$$

(on remarque que ce facteur PV a en fait la dimension d'une énergie). Par ailleurs, nT

est composé de grandeurs qui correspondent à des dimensions fondamentales, donc

$$[nT] = \mathrm{N}\cdot\Theta$$

On en déduit que

$$\boxed{[R] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\Theta^{-1}}$$

Puisqu'on a reconnu dans le facteur $\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}$ une énergie, on utilisera comme unité le $\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$.

□ Exercice 4.6. Troisième loi de Kepler

1. On sait que $\dim(T) = T$, $\dim(R) = L$, $\dim(G) = M^{-1}.L^3.T^{-2}$ et $\dim(M) = M$.
Donc $\dim(T) = (\dim(R))^a.(\dim(G))^b.(\dim(M))^c \Rightarrow T = L^a.(M^{-1}.L^3.T^{-2})^b.M^c \Rightarrow T = L^{a+3b}.T^{-2b}.M^{c-b}$.
On obtient un sysème d'équation tel que :

$$\begin{cases} -2b = 1 \\ a + 3b = 0 \\ c - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b = -1/2} \\ \boxed{a = 3/2} \\ \boxed{c = -1/2} \end{cases}$$

2. On a donc $T = 2\pi R^{3/2}G^{-1/2}M^{-1/2}$.

Exprimons cette relation au carré : $T^2 = 4\pi^2R^3G^{-1}M^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{MG}}$. Par identification : $\boxed{k = \frac{4\pi^2}{MG}}$

□ Exercice 4.7. Energie dégagée par une explosion

1. On a déjà montré que $\boxed{\dim(\mathcal{E}) = M.L^2.T^{-2}}$.

Par définition $\rho = \dfrac{m}{V}$ donc $\boxed{\dim(\rho) = M.L^{-3}}$.

2. L'équation aux dimensions est de la forme :

$$\boxed{\dim(R) = (\dim(\mathcal{E}))^\alpha.(\dim(\rho))^\beta.(\dim(t))^\gamma}$$

On a donc :

$$L = (M.L^2.T^{-2})^\alpha.(M.L^{-3})^\beta.T^\gamma \Rightarrow L = M^{\alpha+\beta}.L^{2\alpha-3\beta}.T^{-2\alpha+\gamma}$$

On obtient un sysème d'équation tel que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha - 3\beta = 1 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\alpha = 1/5} \\ \boxed{\beta = -1/5} \\ \boxed{\gamma = 2/5} \end{cases}$$

On déduit une relation de la forme : $\boxed{R = \mathcal{E}^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}}$.

3. Réorganisons l'expression précédente :

$$\mathcal{E}^{1/5} = R.\rho^{1/5}.t^{-2/5} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = R^5.\rho^1.t^{-2}}$$

A.N :

$$\mathcal{E} = 130^5.\underbrace{1,3}_{\text{en } kg.m^{-3}}.0,025^{-2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = 7,7.10^{13}\ J!}$$

4. Si 1 kg de TNT libère environ 4.10^6 J et que la CIA estime que la bombe libère l'énergie de 20 kilotonnes de TNT, alors l'énergie libérée est de l'ordre de :

$$\boxed{\mathcal{E} = 20 \times 10^6 \times 4.10^6 = 8.10^{13}\ J}$$